


Universidade de Brasília
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

Estudo da camada limite hidrodinâmica de emulsões diluídas

Por,
Rodrigo Bento Rebouças

Brasília
Julho de 2014



Rodrigo Bento Rebouças

Estudo da camada limite hidrodinâmica de emulsões diluídas

Trabalho submetido ao Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Universidade de Brasília
Faculdade de Tecnologia

Orientador: Prof. Taygoara Felamingo de Oliveira, PhD.

Brasília
Julho de 2014

Rodrigo Bento Rebouças

Estudo da camada limite hidrodinâmica de emulsões diluídas. Rodrigo Bento Rebouças. – Brasília, Julho de 2014.

74 p. : il.; 30 cm.

Orientador: Prof. Taygoara Felamingo de Oliveira, PhD.

Projeto de Graduação – Universidade de Brasília
Faculdade de Tecnologia – Julho de 2014.

1. Emulsões diluídas. 2. Camada Limite. 3. Método de Elementos Finitos.
I. Prof. Taygoara Felamingo de Oliveira, PhD. II. Universidade de Brasília. III.
Faculdade de Tecnologia. IV. Estudo da camada limite hidrodinâmica de emulsões
diluídas.

CDU 02:141:005.6

Rodrigo Bento Rebouças

Estudo da camada limite hidrodinâmica de emulsões diluídas

Trabalho submetido ao Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Banca Examinadora

Prof. Taygoara Felamingo de Oliveira,
PhD.
Orientador

Prof. Marcus Vinicius Girão de
Morais, PhD.
Examinador 1

Prof. Rafael Gabler Gontijo , PhD.
Examinador 2

Brasília, 02 de julho de 2014.

Dedico este trabalho a toda minha família. Em especial, aos meus queridos pais, Rômulo e Suely, fonte de amor incondicional e a minha irmã, Fernanda, sempre presente em minha vida.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente, aos meus pais, por me viabilizarem a vida e a oportunidade de crescer dentro de um lar sadio. Pelas noites sem dormir, pelos ensinamentos, pelos exemplos e, acima de tudo, pela sinceridade e amor. Por estarem do meu lado e me apoiarem na busca dos meus sonhos. Por me deixarem conduzir meu caminho com meus próprios pés sempre me mostrando o verdadeiro sentido da vida. Obrigado, meus pais. Não sei como agradecer por tudo que vocês fizeram por mim.

A minha irmã, pela confiança, amor e carinho. Pelo exemplo de perseverança e dedicação; e por todos os momentos que passamos juntos ao longo de nossa jornada. Meus sinceros agradecimentos.

A minha madrinha, pelo exemplo de pessoa batalhadora que é. Por me tratar como um filho e por demonstrar, através de seus mais simples atos, a sua grandeza de espírito.

A minha prima, Samantha, pela confiança depositada em mim ao me conceder a oportunidade de ser padrinho de seu filho, Davi. Pelo seu amor transparente de irmã.

A toda a minha família pelo suporte e amparo. Em especial aos meus primos, amigos de infância, Rafael Lourenço e Bruno Eloi, pelas conversas, pela vivência e pelo aprendizado.

Ao Professor Taygoara Felamingo de Oliveira por me aceitar como aluno da disciplina Projeto de Graduação. Pela orientação paciente e pelos ensinamentos de grande valia nas disciplinas de Cálculo I, Máquinas Térmicas, Métodos Numéricos e Elementos Finitos em Fluidos. Pelo tema proposto para este trabalho e pela grande oportunidade de crescimento que me foi dada.

Aos Professores, Grace Ferreira Ghesti e Julio Lemos de Macedo, por abrirem as portas do meio da pesquisa e experimentação para mim.

A todos os meus amigos, em especial, Daniel, Diego, Diogo, Enrico, Jonatas, Mateus e Samuel, pelo companheirismo e por me proporcionarem momentos felizes de muita música e descontração.

A Ivan Rosa de Siqueira, pela amizade sincera e pelas discussões e estudos no campo da Mecânica dos Fluidos. Pela acentuada predisposição de ensinar e pelas valiosas contribuições que deu para este trabalho.

A Júlia Lins, amiga e companheira sempre presente em praticamente todas as disciplinas cursadas ao longo de minha graduação.

A todos os colegas e amigos de curso que de certa forma contribuíram para a minha formação. Em especial, Lucas Hildebrand, Anderson Gustavo Frota, Ricardo Teixeira, Lucas Marques, Hugo Vilela, Hugo Teixeira, Raphael Araújo, Ivan Schneider, Mário e Matheus Zegatti.

Resumo

Este trabalho trata do estudo da reologia do escoamento de camada limite para uma emulsão monodispersa e diluída. Para tanto, uma descrição concisa da hidrodinâmica na escala da gota é efetuada a fim de computar os efeitos da tensão induzida pela fase dispersa na escala macroscópica do escoamento. Na escala da gota, o escoamento é tratado como livre de inércia e de movimento browniano de modo que a gota é convectada pelo mesmo. Nesta escala, as equações que governam o movimento da partícula são as equações de Stokes. Em regime de pequenas deformações, um modelo constitutivo de uma emulsão é apresentado sendo composto por duas equações. A primeira delas descreve a evolução do formato da gota e, a outra, computa o fluxo de quantidade de movimento adicional oriundo desta mudança de geometria na escala microscópica. O foco deste trabalho é estudar e desenvolver um modelo de equação de movimento, para o escoamento macroscópico de uma emulsão, cujo tensor de tensões global incorpore a contribuição do tensor de tensões induzido pela fase dispersa. A este modelo são aplicadas as hipóteses simplificadoras da camada limite a fim de obter uma equação que descreve o movimento da emulsão nesta fina camada de fluido. Paralelamente, um método numérico de elementos finitos em fluidos é desenvolvido e estuda-se a formulação integral das equações de Navier-Stokes. Para a validação do código próprio utilizado neste trabalho, o problema do escoamento da camada limite laminar é apresentado. O resultado é, então, comparado com outros disponíveis na literatura. O objetivo da parte numérica é de criar subsídios para a formulação integral em elementos finitos da equação do movimento obtida para a camada limite de uma emulsão monodispersa e diluída. Neste âmbito, simulou-se numericamente o escoamento de uma emulsão sobre uma placa plana e os resultados alcançados foram comparados com o caso de um fluido Newtoniano. Em trabalhos futuros, a meta é adimensionalizar e estudar a solução analítica do modelo de equação de movimento desenvolvida neste trabalho.

Palavras-chaves: Emulsões diluídas. Camada Limite. Método de Elementos Finitos.

Abstract

This work examines the rheology of the flow inside the boundary layer of a diluted and monodispersed emulsion. That being so, a concise description of the hydrodynamics on the scale of the drop is performed to compute the effects of the stress induced by the droplet. This study considers the flow as free of inertia and Brownian motion. Based on this, it is assumed that the drop is, in fact, convected by the flow. On this scale, the equations governing the motion of the particle are the Stoke's equations. In the regime of small deformations, a constitutive model of an emulsion is presented consisting of two equations. The first describes how the geometry of the drop varies along time. The second computes the additional flux of linear momentum that arises from the development of the drop shape in a microscopic scale. This work aims to study and develop a model of motion equation, for the macroscopic flow of an emulsion, whose stress tensor incorporates the overall contribution of the stress tensor induced by the dispersed fase. In this model, the simplifying hypothesis of the boundary layer is applied to obtain an equation that describes the motion of the emulsion within this thin layer of fluid. Meanwhile, a finite element method in fluid dynamics is developed and the integral formulation of the Navier-Stokes equation is also studied. For the validation of the code used in this work, the boundary layer flow over a flat plate is simulated. The result is then compared with others available in the literature. The purpose of the numerical analysis is to create subsidies to reach the integral formulation of the equations of motion inside the limits of the boundary layer. In this context, in future works, the aim is to study the dimensionless form of the motion equation developed in this work as well as seek for its analytical solution.

Key-words: Emulsions. Boundary Layer. Finite Element Method.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Contextualização	1
1.2	Objetivos	2
1.2.1	Objetivos Gerais	2
1.2.2	Objetivos Específicos	2
1.3	Revisão Bibliográfica	3
1.4	Estrutura do Trabalho	4
2	Equações Governantes	6
2.1	Equações de balanço da mecânica dos fluidos	6
2.2	Tensor de Landau-Batchelor	9
2.3	Teoria de pequenas deformações para uma emulsão	11
2.3.1	Equação evolutiva para a forma da gota	12
2.3.2	Tensão induzida pela fase dispersa	16
2.4	Modelo constitutivo completo de uma emulsão	18
3	Equações da Camada Limite	19
3.1	Equações da camada limite para emulsões monodispersas e diluídas	22
3.1.1	Determinação do tensor de distorção da gota \mathbf{A} em função do escoamento	26
3.1.2	Determinação do tensor de tensões da gota $\boldsymbol{\sigma}^d$ em função do escoamento	26
3.1.3	Modelo de Equação da Camada Limite para um emulsão monodispersa e diluída	27
4	Modelo numérico	29
4.1	Métodos Variacionais	30
4.2	Formulação Integral	31
4.3	Formulação numérica para a Camada Limite	33
4.3.1	Formulação Integral das Equações de Navier-Stokes	33
4.3.1.1	Formulação Fraca - Método dos Resíduos Ponderados	34
4.3.1.2	Resíduo Ponderado da Equação do Movimento	34
4.3.1.3	Resíduo Ponderado da Equação da Conservação da Massa	36
4.3.2	Expansão dos Campos de Velocidade e Pressão	36
4.3.3	Construção do Elemento	37
4.3.4	Mapeamento Isoparamétrico	41
4.3.5	Integração numérica	42
4.3.6	Método de Newton-Raphson	43

4.3.7	Problema Convectivo Difusivo	46
4.3.8	Rudimentos de Estabilização	47
4.3.8.1	Caso Multidimensional SU	49
4.3.9	Método numérico estabilizado para um fluido Newtoniano	50
4.3.10	Método numérico estabilizado para uma emulsão diluída	53
4.3.11	Condições de Contorno	56
4.3.11.1	Condição de Contorno de Dirichlet	56
4.3.11.2	Condição de Saída de Escoamento	57
4.3.11.3	Condição de Contorno de Pressão	59
5	Resultados e discussões	60
5.1	Parâmetros de Entrada	60
5.2	Camada limite de um fluido Newtoniano	61
5.3	Camada limite de uma emulsão diluída	64
5.3.1	Comparação do perfil da emulsão com o perfil correspondente da fase contínua	65
5.3.2	Similaridade dos perfis de velocidade	66
5.3.3	Comparação dos termos do modelo de equação para a camada limite de uma emulsão diluída	68
6	Conclusões e trabalhos futuros	71
	Referências	73

Lista de ilustrações

Figura 1 – Diagrama de uma emulsão monodispersa e diluída, em que a é o raio da gota.	17
Figura 2 – Diagrama esquemático mostrando o formato e principais componentes da camada limite	20
Figura 3 – Numeração dos nós do elemento biquadrático. Neste elemento as variáveis ξ e η são as coordenadas locais do elemento.	38
Figura 4 – Correspondência entre os graus de liberdade de velocidade e pressão do elemento biquadrático e seus respectivos nós.	40
Figura 5 – Descrição gráfica do mapeamento isoparamétrico de um elemento biquadrático.	41
Figura 6 – Descrição gráfica do método de Newton-Raphson. A tangente à função em x_i é prolongada até o eixo x para fornecer uma estimativa em x_{i+1}	43
Figura 7 – Representação das funções de base de Galerkin e Petrov-Galerkin assim como o posicionamento de dois elementos consecutivos, e e $e + 1$	48
Figura 8 – Condições de contorno de Dirichlet, pressão e saída de escoamento aplicadas a uma malha retangular.	56
Figura 9 – Dimensões do domínio de cálculo utilizado para gerar os resultados deste trabalho.	60
Figura 10 – Comparação do perfil obtido pelo método numérico com os perfis analíticos quadrático e cúbico.	64
Figura 11 – Comparação entre o perfil da camada limite da emulsão com o perfil correspondente da fase contínua.	65
Figura 12 – Gráfico do campo de velocidade de uma emulsão monodispersa e diluída no intervalo de x variando entre 1,0 e 1,6 metros.	67
Figura 13 – Análise da similaridade do perfil de camada limite de uma emulsão parcialmente diluída.	67
Figura 14 – Comparação dos termos do modelo de equações obtido neste trabalho na direção \mathbf{x}	69
Figura 15 – Comparação dos termos do modelo de equações obtido neste trabalho na direção \mathbf{y}	70
Figura 16 – Comparação dos termos do modelo de equações obtido neste trabalho. . . .	70

Lista de tabelas

Tabela 1	–	Tabela a lista de diferentes combinações de funções de base ϕ_i e ψ_i	37
Tabela 2	–	Numeração dos graus de liberdade de velocidade e pressão do elemento bi-quadrático	40

Lista de símbolos

Símbolos latinos

a	Raio da gota não deformada; termo advectivo
\mathbf{a}	Vetor velocidade
\mathbf{A}	Tensor distorção da gota ou tensor de Green; matriz global
\mathbf{b}	Vetor que incorpora as condições de contorno de um problema em elementos finitos
B	Constante do método de estabilização para uma emulsão, onde $B = \frac{c_1 c_2 c_5}{6}$
\mathbf{B}	Tensor de forma da gota (Frankel & Acrivos, 1970)
c	Constante analítica do modelo microestrutural de pequenas deformações, $c = 20/19$; coeficientes de combinação linear
c_1	Constante analítica do modelo microestrutural de pequenas deformações, $c_1 = \frac{20}{19} \frac{\sigma}{\lambda \mu a}$
c_2	Constante analítica do modelo microestrutural de pequenas deformações, $c_2 = \frac{5}{2\lambda}$
c_3	Constante analítica do modelo microestrutural de pequenas deformações, $c_3 = \left(5 - \frac{25}{2\lambda}\right)$
c_4	Constante analítica do modelo microestrutural de pequenas deformações, $c_4 = 4 \frac{\sigma}{\lambda \mu a}$
c_5	Constante analítica do modelo microestrutural de pequenas deformações, $c_5 = \frac{15}{7}$
C_1, C_2	Constantes da teoria de pequenas deformações em baixas capilaridades
\mathbf{c}	Vetor de coeficientes de combinação linear
D	Constante do método de estabilização para uma emulsão, onde $D = \frac{c_1 c_2 c_4}{2}$
d_s	Comprimento de um arco material após a deformação
d_{s_0}	Comprimento de um arco material antes a deformação
$d\mathbf{x}$	Arco material de comprimento d_s

$d\mathbf{x}_0$	Arco material de comprimento d_{s_0}
e	Elongação normal da gota, $e = \frac{d_s - d_{s_0}}{d_{s_0}}$; elemento
E	Constante do método de estabilização para uma emulsão, onde $E = \frac{c_2 c_4}{2}$
\mathbf{E}	Tensor taxa de deformação
f	Função corrente adimensional de Blasius
\mathbf{f}	Força superficial por unidade de volume
f_x	Componente da força superficial na direção \mathbf{x}
f_y	Componente da força superficial na direção \mathbf{y}
F	Função a ser integrada pelo método da Quadratura de Gauss em coordenadas globais; Constante do método de estabilização para uma emulsão, onde $F = \frac{c_3}{2}$
\tilde{F}	Função a ser integrada pelo método da Quadratura de Gauss em função das coordenadas dos pontos de Gauss
F_i	Escala de força de inércia
F_μ	Escala de força viscosa
\mathbf{F}	Força de arrasto hidrodinâmica
\mathcal{F}	Tensor gradiente de deformação
\mathbf{g}	Força de campo por unidade de massa
h	Tamanho do elemento
\mathbf{I}	Tensor identidade
\mathbf{J}	Matriz Jacobiana
$\mathbf{J}^{(e)}$	Matriz Jacobiana elementar
\mathbf{JAC}	Matriz Jacobiana de transformação de coordenadas
l	Comprimento característico da escala local
L	Comprimento característico da escala macroscópica
m	Dimensão do campo de pressão ($m = 3$)

n	Número de densidade médio de uma suspensão; dimensão de cada componente do campo de velocidade e de cada componente da função vetorial peso
\mathbf{n}	Vetor normal unitário
N	Número total de partículas contidas em um volume da escala local de uma suspensão; dimensão do subespaço da solução aproximada $u_h(x)$ (Métodos Variacionais)
p	Pressão mecânica; campo de pressão
p_n	Pressões harmônicas sólidas associadas à pressão
P_i	Graus de liberdade do campo de pressão
P_0	Constante de pressão
P^*	Pressão a ser imposta como condição de contorno
r	Variável raio
R	Resíduo ponderado; raio da superfície S^∞
R_c	Resíduo ponderado da equação da continuidade
R_m	Resíduo ponderado da equação do movimento
R_c^{SU}	Resíduo ponderado da equação da continuidade para o método SU
R_m^{SU}	Resíduo ponderado da equação do movimento para o método SU
R_c^e	Resíduo ponderado da equação da continuidade para a emulsão
R_m^e	Resíduo ponderado da equação do movimento para a emulsão
R_{mx}	Resíduo ponderado da equação do movimento na direção \mathbf{x}
R_{my}	Resíduo ponderado da equação do movimento na direção \mathbf{y}
R_{mx}^{SU}	Resíduo ponderado da equação do movimento na direção \mathbf{x} do método SU
R_{my}^{SU}	Resíduo ponderado da equação do movimento na direção \mathbf{y} do método SU
R_{mx}^e	Resíduo ponderado da equação do movimento na direção \mathbf{x} da emulsão
R_{my}^e	Resíduo ponderado da equação do movimento na direção \mathbf{y} da emulsão
\mathbf{R}	Vetor contendo os resíduos ponderados de cada elemento
S^α	Superfície que delimita uma partícula da suspensão

S_α	Tensor de Landau-Batchelor de uma suspensão
T	Temperatura absoluta
\mathbf{T}	Tensor de tensões de um fluido newtoniano (modelagem numérica)
u	Componente da velocidade na direção \mathbf{x}
u_h	Solução aproximada pelo método dos elementos finitos
\mathbf{u}	Vetor velocidade; campo de velocidade
\mathbf{u}^s	Velocidade na superfície da gota
\mathbf{u}^∞	Velocidade do escoamento não perturbado
\mathbf{U}	Velocidade de translação de uma partícula
U	Espaço de solução exata (formulação forte); velocidade característica do escoamento
U_∞	Componente escalar da velocidade do escoamento não perturbado na direção \mathbf{x}
U_a	Velocidade característica na escala da gota
U_h	Espaço de solução aproximada (formulação fraca)
U_i	Graus de liberdade da componente \mathbf{x} do campo de velocidade, $i = 1, \dots, 9$
U_{parede}	Velocidade na parede na direção \mathbf{x}
v	Componente da velocidade na direção \mathbf{y}
V	Porção de volume da escala da gota; espaço de funções peso (formulação forte)
V_α	Volume de uma partícula da suspensão
V_f	Volume da fase contínua da suspensão
V_h	Espaço de funções peso (formulação fraca)
V_i	Graus de liberdade da componente \mathbf{y} do campo de velocidade, $i = 1, \dots, 9$
V_{parede}	Velocidade na parede na direção \mathbf{y}
\mathbf{V}	Velocidade de translação de corpo rígido
\mathbf{w}	função vetorial peso

$\widetilde{\boldsymbol{w}}$	função vetorial peso de Petrov-Galerkin
w_1	Componente da função vetorial peso na direção \boldsymbol{x}
w_2	Componente da função vetorial peso na direção \boldsymbol{y}
W_{igp}	Peso associado à coordenada ξ_{igp} de Gauss
W_{jgp}	Peso associado à coordenada η_{jgp} de Gauss
\boldsymbol{W}	Tensor vorticidade
x	Coordenada global do nó local na direção \boldsymbol{x}
X_j	Coordenada global do nó local na direção \boldsymbol{x}
y	Coordenada global do nó local na direção \boldsymbol{y}
Y_j	Coordenada global do nó local na direção \boldsymbol{y}

Símbolos gregos

β	Parâmetro que controla a difusidade numérica
$\dot{\gamma}$	Termo dominante de cisalhamento, $\dot{\gamma} = \partial u / \partial y$
$\dot{\gamma}_c$	Taxa de deformação característica
δ_{ij}	Operador Delta de Kronecker
δ	Espessura da camada limite
κ	Constante de Stefan-Boltzmann, $1,3806503 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
$\bar{\kappa}$	Curvatura média local, $\frac{1}{2} (\nabla_s \cdot \boldsymbol{n})$
λ	Razão de viscosidade, $\lambda = \frac{\mu d}{\mu}$
μ	Viscosidade dinâmica molecular do fluido ambiente
μ_d	Viscosidade da fase dispersa
μ_B	Viscosidade efetiva de uma emulsão, $\mu_B = \left[1 + \phi \left(\frac{5}{2} - \frac{25}{4\lambda} \right) \right]$ (Oliveira, 2007)
μ_T	Viscosidade de Taylor
ν	Viscosidade cinemática molecular do fluido ambiente, μ/ρ

$\bar{\nu}$	Difusidade adicional (Método de Estabilização Numérica)
η	Elongação normal de um arco de material; coordenada na direção \mathbf{y} do elemento; variável de similaridade
η_{igp}	Coordenada na direção \mathbf{y} do ponto de Gauss
ξ	Coordenada na direção \mathbf{x} do elemento
ξ_{igp}	Coordenada na direção \mathbf{x} do ponto de Gauss
ρ	Massa específica do fluido ambiente
ρ_d	Massa específica da fase dispersa
σ	Coefficiente de tensão superficial
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensões
$\boldsymbol{\sigma}^d$	Tensor de tensões induzido pela fase dispersa
$\boldsymbol{\sigma}^N$	Tensor de tensões de um fluido Newtoniano
$\boldsymbol{\sigma}^T$	Tensor de tensões transposto
$\boldsymbol{\Sigma}^d$	Parte deviatória do tensor de tensões
τ_d	Tempo característico de difusão
τ_e	Tempo característico de convecção do escoamento
τ_σ	Tempo característico de relaxação da gota
ϕ	Fração volumétrica da emulsão
ϕ_i	Funções de base do subespaço de solução aproximada
χ_i	Funções de base do subespaço da função escalar peso w
ψ	Função corrente
ψ_i	Funções de base do subespaço de cada componente da função vetorial peso \mathbf{w}
ω	Velocidade angular do escoamento
ω_x	Velocidade angular da gota
Ω	Domínio de fluido

Γ	Fronteira do domínio de fluido
$\Delta \mathbf{f}$	Salto de tensões através de uma interface fluida
∇_s	Gradiente avaliado sobre uma superfície S , $\nabla_s = (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}) \cdot \nabla$
$\langle \rangle$	Média volumétrica na escala local. Exemplo: $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma} dV$
Δ	Diferença

Grupos adimensionais

Ca	Número de capilaridade
Pe	Número de Peclet
Pe_h	Número de Peclet na escala elementar
Pe_a	Número de Peclet na escala da gota, $Pe = \frac{6\pi\mu a^3 \dot{\gamma}_c}{kT}$
Re	Número de Reynolds
Re_a	Número de Reynolds na escala da gota, $Re_a = \frac{\rho \dot{\gamma}_c a^2}{\mu}$
Re_L	Número de Reynolds na escala macroscópica, $Re_L = \frac{\rho UL}{\mu}$

*Embora ninguém possa voltar atrás e fazer um novo começo, qualquer um pode começar agora
e fazer um novo fim.*

Francisco de Paula Cândido Xavier.

1 Introdução

1.1 Contextualização

Dispersões coloidais são caracterizadas por pequenas partículas, gotas e bolhas de uma única fase, de dimensões entre 1 e 1000 nm, que estão dispersas em uma segunda fase (Schramm, 2005). Estas dispersões são classificadas em liofílicas ou liofóbicas. As dispersões liofílicas são formadas espontaneamente quando as duas fases são colocadas em contato, indicando que a dispersão, em si, é mais estável do que as duas fases separadas. Um exemplo deste tipo de dispersão é uma solução de proteínas. Por outro lado, as dispersões liofóbicas não se formam de maneira espontânea, de modo que é necessário inserir energia no sistema (realizando trabalho e agitando a mistura, por exemplo).

Dentre os principais tipos de dispersões liofóbicas, as emulsões aparecem em destaque pela sua abrangência de aplicações. Emulsões são dispersões coloidais liofóbicas formadas por dois líquidos imiscíveis e viscosos em que um encontra-se na fase dispersa, na forma de gotas, e o outro na fase contínua (Schramm, 2005). De acordo com a distribuição física da fase dispersa, as emulsões podem ser classificadas como polidispersas, nas quais as gotas possuem diferentes tamanhos, ou monodispersas, em que as gotas apresentam, na média, o mesmo formato e tamanho (Carvalho, 2008). Usualmente, o diâmetro da gota encontra-se da faixa entre 1 μm e 100 μm (Oliveira, 2007). O caso mais comum de emulsão é composto por uma mistura de água e óleo, na qual a fase dispersa pode ser tanto a água quanto o óleo. No caso em que a água é a fase dispersa, a nomenclatura W/O é usada e quando o óleo é a fase dispersa, a nomenclatura O/W é a adotada (Schramm, 2005). Normalmente, emulsões são fluidos não Newtonianos, pois as tensões de cisalhamento não variam linearmente com a taxa de cisalhamento do escoamento (Carvalho, 2008).

Em geral, agentes emulsificantes são adicionados às emulsões com a finalidade de aumentar a estabilidade da fase dispersa. Estes emulsificantes atuam reduzindo a magnitude da tensão superficial, facilitando a formação de pequenas gotas e, até mesmo, evitando que microgotas preexistentes se unam formando gotas maiores pelo fenômeno da coalescência (Carvalho, 2008). Exemplos de agentes emulsificantes são eletrólitos inorgânicos simples, surfactantes e macromoléculas (Schramm, 2005).

Devido às suas características físicas e químicas peculiares, as emulsões desempenham um papel diversificado na indústria. Tambe & Sharma (1993) listaram os principais campos de atuação como sendo os das indústrias alimentícia, cosmética, farmacêuticas e petroquímica. Na natureza, pode-se identificar a presença de emulsões no próprio corpo humano. O sangue, por

exemplo, pode ser descrito como uma emulsão polidispersa estável (Carvalho, 2008). Outros exemplos comuns de produtos que podem ser classificados como emulsões são a manteiga, a maionese, as loções para estética, o leite, dentre outros. Processos térmicos também são muito relevantes no estudo das emulsões para efeitos práticos. A forma como uma emulsão responde a variações de temperatura permitiu o desenvolvimento e aprimoramento do processo de pasteurização do leite, que envolve o aquecimento e o posterior resfriamento desta mistura. Além disso, na indústria petroquímica o transporte da mistura de água e óleo por tubulações também envolve processos como perda de carga e transferência de calor (Olim et al., 2003).

Neste âmbito, devido à grande aplicabilidade e uso de emulsões no cenário atual, a análise da maneira como as emulsões interagem com os contornos sólidos que as transportam é um tópico de interesse de estudiosos. Na interface entre a emulsão e a parede sólida as partículas de fluido aderem à parede, apresentando velocidade nula nestes pontos. À medida que a distância com relação à parede aumenta, as partículas de fluido ganham velocidade, até atingir a velocidade do escoamento não perturbado. Esta região de variação de velocidade delimita uma fina camada onde os efeitos viscosos, devido às flutuações de velocidade e transferência de quantidade de movimento entre as partículas de fluido, não podem ser desprezadas. Esta fina camada é conhecida como camada limite. Pretende-se desenvolver estudos da microdeformação das gotas e, a partir dos resultados obtidos, gerar soluções analíticas e numéricas para a equação do movimento da emulsão dentro dos domínios físicos da camada limite. É importante lembrar que na escala da gota os efeitos de inércia são desprezados. Além disso, como o estudo será feito em microescalas, possíveis curvaturas da geometria dos contornos sólidos serão aproximadas para uma placa plana sobre a qual o escoamento será desenvolvido. Neste estudo, o escoamento será tratado como incompressível e bidimensional. Na formulação do problema considera-se emulsões diluídas nas quais as perturbações hidrodinâmicas geradas por uma gota não são percebidas pelas que estão nas suas proximidades. Emulsões diluídas são aquelas em que a concentração da fase dispersa é menor do que 30% (Oliveira, 2007).

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivos Gerais

Estudar a reologia de emulsões em termos da microdeformação das gotas e desenvolver soluções analítica e numérica para o escoamento de camada limite de emulsões. O escoamento será sobre uma placa plana cujo comprimento é muito maior do que a espessura da camada limite.

1.2.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- realizar revisão bibliográfica dos artigos relacionados ao assunto;
- obter equações gerais para a camada limite bidimensional de um escoamento incompressível de uma emulsão monodispersa e diluída;
- adimensionalizar as equações gerais descritas no item anterior;
- estudar o escoamento sobre uma placa plana;
- modificar código próprio em dinâmica dos fluidos para considerar a camada limite de emulsões usando o método de elementos finitos. Pretende-se gerar a formulação fraca para a equação de movimento para a camada limite por meio de uma abordagem de resíduos ponderados. Determinar a matriz elementar considerando os efeitos do tensor de tensões adicional devido à influência das microdeformações da gota no escoamento da emulsão;
- estudar os efeitos associados ao comportamento não Newtoniano da emulsão na camada limite.

1.3 Revisão Bibliográfica

A reologia é um campo do conhecimento que estuda o escoamento de materiais. A partir de trabalhos pioneiros como o de Einstein (1906) e Taylor (1932), modelos reológicos de emulsões foram estudados e adaptados ao longo dos anos. A viscosidade de fluidos contendo pequenas partículas esféricas e sólidas foi primeiramente estudada por Einstein como um problema teórico em hidrodinâmica. Neste caso, ele propôs um modelo reológico para suspensões diluídas de partículas sólidas e esféricas em termos da viscosidade efetiva. Até alguns anos após a formulação deste modelo viscoso, ninguém havia proposto uma extensão deste trabalho para líquidos contendo microgotas de outro líquido em suspensão. As dificuldades inerentes ao estabelecimento das corretas condições de contorno para o problema geraram barreiras para o aprofundamento do estudo. Taylor (1932) atacou este problema e propôs uma expressão semelhante a de Einstein. Neste modelo, considerou as gotas e a velocidade de distorção do fluido tão pequenas que a tensão superficial tenderia a manter o formato das mesmas aproximadamente esférico. Deste modo, a análise de Einstein poderia ser estendida para suspensões diluídas envolvendo líquidos. No entanto, o problema de que qualquer movimento da fase contínua gerava distorções na fase dispersa persistiu. Dessa forma, Taylor (1934) abordou este assunto novamente, agora experimentalmente, e encontrou uma expressão analítica para pequenas distorções da forma esférica. Nesta abordagem, relacionou a tensão superficial, a viscosidade e o raio da gota, para escoamentos sob pequenas taxas de cisalhamento. Schowalter et al. (1968) desenvolveram uma análise da consequência da deformação de uma gota na macroreologia da emulsão quando ela está submetida à tensões normais. Estabeleceram, então, uma relação entre os efeitos microreológicos que tendem a deformar a gota, devido a um escoamento cisalhante, e os que tendem a

restituir o formato esférico oriundos de forças interfaciais. Isto facilitou o intercâmbio entre as duas escalas. Este trabalho buscou salientar também a ocorrência de efeitos viscoelásticos resultantes da mistura entre dois fluidos Newtonianos e incompressíveis que formam um outro fluido com características não Newtonianas. Frankel & Acrivos (1970) desenvolveram uma equação constitutiva para emulsões diluídas assumindo deformações infinitesimais de pequenas gotas suspensas em um escoamento cisalhante dependente do tempo. A equação obtida refletiu um efeito de memória da emulsão atribuído a não linearidade de variáveis cinemáticas e à dinâmica da superfície da gota.

Bachelor (1976) desenvolveu um estudo em microescalas relacionado à tensão local sobre as partículas de uma suspensão submetidas a um escoamento cisalhante uniforme. Neste trabalho, uma abordagem estatística foi adotada para a determinação da distribuição de tensão sobre a superfície de uma partícula de qualquer tamanho, formato ou constituição, incluindo os casos em que as partículas eram gotas ou bolhas de gás. Prosseguindo esta linha de estudo e à luz dos modelos antecedentes que relacionam os efeitos das microdeformações das gotas sobre o campo de tensão da emulsão, Maffettone & Minale (1998) propuseram um modelo fenomenológico para a deformação de uma gota imersa em um fluido Newtoniano sujeito a um campo de velocidade uniforme. Este modelo baseou-se na hipótese de que o formato da gota é elipsoidal em todos os momentos, até para razões de viscosidades menores do que a unidade e para uma vasta relação de número de capilaridade. É importante ressaltar que o número de capilaridade expressa uma razão entre forças de cunho viscoso e forças interfaciais. Para pequenos números de capilaridade, por exemplo, os efeitos das forças interfaciais são dominantes e a gota tende a sofrer pequenos desvios de seu formato original. Mais recentemente, Oliveira (2007) apresentou resultados de análises microhidrodinâmicas de emulsões diluídas em regime de pequenas deformações. Neste trabalho, ferramentas assintóticas e o Método Integral de Contorno foram utilizados para analisar a evolução da geometria de gota em função de diferenças de tensões normais em sua superfície. Mais uma vez, buscou-se estudar o efeito da tensão média induzida na macrorreologia da emulsão em função da distribuição de tensão na superfície de cada gota.

1.4 Estrutura do Trabalho

Este trabalho está estruturado em seis capítulos. O primeiro capítulo aborda os conceitos mais gerais sobre o que é uma emulsão, os objetivos gerais e específicos do trabalho; e faz uma breve revisão bibliográfica do assunto em busca de mostrar a evolução do mesmo no meio científico. O capítulo dois expõe conceitos sobre as equações de balanço da mecânica dos fluidos e o formato de um modelo reológico constitutivo da hidrodinâmica de uma emulsão monodispersa e diluída. Neste capítulo explora-se também o comportamento físico de uma gota imersa em um escoamento cisalhante simples. O terceiro capítulo apresenta, primeiramente, os conceitos básicos sobre o significado da camada limite e mostra as hipóteses que podem ser

adotadas para simplificar a forma da equação do movimento dentro desta região. Com isso, o modelo constitutivo apresentado no capítulo dois é utilizado para a determinação do novo tensor de tensões da gota que irá influenciar no fluxo de quantidade de movimento da emulsão vista como um todo. Dessa forma, um novo modelo de equação de movimento para a camada limite de uma emulsão é obtido e apresentado ao final deste capítulo. Dando continuidade, o capítulo quatro mostra os conceitos básicos do método numérico que será utilizado neste trabalho para o estudo da equação do movimento e do comportamento da camada limite de uma emulsão. Neste capítulo, conceitos relacionados à formulação de um problema em elementos finitos é apresentada assim como a metodologia utilizada para a formulação integral das equações de Navier-Stokes, incluindo as condições de contorno para um problema que trata da camada limite sobre uma placa plana. Ainda neste capítulo, um método de estabilização é apresentado e aplicado a este problema. O capítulo cinco, por sua vez, apresenta os resultados obtidos para o problema numérico proposto no capítulo quatro. Estes resultados são comparados com outros obtidos na literatura com a finalidade de validar o código próprio utilizado. Vale lembrar que o primeiro resultado deste trabalho é referente ao modelo de equação de movimento da camada limite de uma emulsão apresentado no capítulo três por questões de conveniência. O capítulo seis versa sobre as conclusões e os trabalhos futuros, com o intuito de sedimentar o conhecimento apresentado e projetar o caminho a ser seguido tendo como base os resultados expostos.

2 Equações Governantes

2.1 Equações de balanço da mecânica dos fluidos

As leis físicas fundamentais que governam o movimento e a transferência de partículas imersas em um fluido são a segunda Lei de Newton e o princípio da conservação da massa. A aplicação destas leis em um volume de controle infinitesimal resulta, respectivamente, nas equações da continuidade e de movimento de um fluido, representadas abaixo (Clift et al., 1978):

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}, \quad (2.2)$$

em que ρ é a massa específica fluido, \mathbf{u} é o vetor velocidade Euleriano do movimento, $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões e \mathbf{g} representa uma força de campo conservativo por unidade de massa. Nas equações (2.1) e (2.2) a notação $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$ fornece a derivada temporal de uma quantidade dinâmica ou física ao longo do movimento do fluido. Neste caso, o termo $\frac{\partial}{\partial t}$ retrata uma taxa de variação local da quantidade e o termo $\mathbf{u} \cdot \nabla$ incorpora os efeitos convectivos devido ao transporte do elemento de fluido em análise para uma outra posição. Este operador, também conhecido como derivada material, tem significado se aplicado a um campo variável, ou seja, a um campo que varia em função da posição \mathbf{x} e do tempo t como, por exemplo, o campo de velocidade \mathbf{u} (Batchelor, 1967).

A segunda lei de Newton define que a taxa de variação da quantidade de movimento linear de um corpo corresponde ao somatório das forças que sobre ele atuam. Dentre estas forças destacam-se as forças de campo por unidade de massa e as forças de superfície por unidade de volume. Na equação (2.2) o termo referente às forças de superfície é o divergente do tensor de tensões, $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$, e este termo demonstra o comportamento do elemento de fluido quando sujeito a ação de forças de superfície provenientes do contato direto com o material que o engloba. O tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ é um tensor de segunda ordem que, convenientemente, pode ser entendido como a soma de uma parte isotrópica ou esférica, e outra parte não isotrópica ou deviatórica (Batchelor, 1967). Um tensor isotrópico é aquele cujas componentes são invariantes com relação à rotação. Por definição o tensor identidade, $\mathbf{I} = \delta_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j$, é um tensor isotrópico de segunda ordem que serve como base para a obtenção de outros tensores isotrópicos de mesma ordem (Aris, 1962). O operador δ_{ij} é conhecido na literatura como delta de Kronecker, sendo

igual a 1, se $i = j$, ou zero, caso contrário. Assim, o tensor de tensões, $\boldsymbol{\sigma}$, pode ser expresso como:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\Sigma}^d, \quad (2.3)$$

em que p possui um significado puramente mecânico de pressão e $\boldsymbol{\Sigma}^d$ é o tensor deviatórico que está inteiramente relacionado à existência de movimento do fluido. Em uma abordagem fenomenológica, desvios do formato esférico de um elemento de fluido selecionado arbitrariamente em um fluido em movimento estão ligados aos efeitos de transporte molecular de quantidade de movimento contabilizados pelo tensor $\boldsymbol{\Sigma}^d$ (Batchelor, 1970). Dessa forma, para fluidos estacionários ou ideais ($\mu = 0$), o tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ se reduz a parte esférica da equação (2.3) (Batchelor, 1967). Para um fluido Newtoniano e compressível (Aris, 1962)

$$\boldsymbol{\Sigma}^d = 2\mu \left(\mathbf{E} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right), \quad (2.4)$$

em que μ é a viscosidade dinâmica e \mathbf{E} é o tensor taxa de deformação, que corresponde à parte simétrica do tensor gradiente de velocidade. Neste caso, é importante ressaltar que todo tensor de segunda ordem pode ser decomposto em uma parte simétrica e outra antissimétrica. A parcela antissimétrica do tensor gradiente de velocidade é o tensor vorticidade \mathbf{W} . Estes tensores são dados por

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (2.5)$$

e

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T). \quad (2.6)$$

Para um fluido incompressível, em que $D\rho/Dt = 0$, a equação da continuidade (2.1) se reduz a $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Com isso, aplicando este resultado nas equações (2.4), (2.3) e (2.2), o novo tensor de tensões e a equação do movimento para um fluido Newtoniano e incompressível se tornam:

$$\boldsymbol{\sigma}^N = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} \quad (2.7)$$

e

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}. \quad (2.8)$$

Agora, com base nos conceitos desenvolvidos para as equações de balanço de um fluido Newtoniano e incompressível, estudaremos o formato das equações que governam o escoamento na escala microscópica de uma emulsão. O intuito é entender o comportamento do escoamento na escala das gotas e projetar os conceitos obtidos para a macroescala da emulsão. A emulsão, neste caso, é vista como um fluido homogêneo equivalente. No caso de uma emulsão infinitamente diluída, considere uma partícula de fluido com viscosidade μ_d e massa específica ρ_d imersa em um outro fluido (fase contínua) de viscosidade μ e massa específica ρ . Ambos os fluidos são Newtonianos e incompressíveis. A razão entre a viscosidade da fase dispersa e da

fase contínua é denotada por $\lambda = \frac{\mu_d}{\mu}$. A partícula de fluido dispersa está inicialmente na forma esférica e possui raio a . Se o diâmetro da gota for suficientemente pequeno, então o número de Reynolds do escoamento avaliado na escala da partícula, a , também será pequeno, mesmo que o comprimento característico, L , seja elevado. Vale lembrar que o número de Reynolds provém da adimensionalização da equação (2.8) e é, por definição, dado por $Re_L = \frac{\rho U L}{\mu}$. Na escala da gota, $U_a \sim \dot{\gamma}_c a$ e $L \sim a$, assim:

$$Re_a = \frac{\rho \dot{\gamma}_c a^2}{\mu} \ll 1, \quad (2.9)$$

em que $\dot{\gamma}_c \sim \frac{U_a}{a}$ é a taxa de cisalhamento típica do escoamento e U_a é a velocidade característica na escala da gota. A mesma análise pode ser estendida para a interpretação do número de Reynolds no interior da gota, o que também leva a um valor muito menor que a unidade. Isto será válido desde que as viscosidades das fases dispersa e contínua sejam da mesma ordem, ou seja, $\lambda = \mathcal{O}(1)$ (Batchelor, 1967). O baixo valor do número de Reynolds indica que os efeitos viscosos dominam os efeitos de inércia e, assim, o escoamento na escala da gota pode ser considerado livre de inércia (Rallison, 1984). Além disso, considera-se que os campos de velocidade e de pressão ajustam-se em intervalos de tempo menores do que aqueles necessários para uma mudança perceptível na configuração do contorno da gota (Oliveira, 2007), indicando que, na escala da gota, o escoamento também pode ser caracterizado como livre de movimentos Brownianos. Neste aspecto, considera-se que o tempo de difusão, $\tau_d \sim 6\pi\mu a^3/(\kappa T)$, em que κ é a constante de Boltzmann e T é a temperatura absoluta, é muito superior ao tempo convectivo do campo de velocidade $\tau_e \sim 1/\dot{\gamma}_c$, de modo que,

$$Pe_a = \frac{6\pi\mu a^3 \dot{\gamma}_c}{\kappa T} \gg 1, \quad (2.10)$$

em que Pe_a é o número de Peclet na escala da gota. Fisicamente, o número de Peclet pode ser entendido como uma razão entre um tempo característico do processo difusivo, τ_d , (associado ao movimento Browniano) e um tempo característico da escala convectiva do escoamento, τ_e .

Dessa forma, a microhidrodinâmica das emulsões é governada pelas equações de Stokes, que são as equações da continuidade (2.1) e quantidade de movimento (2.2) expressas na forma

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.11)$$

e

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} = 0. \quad (2.12)$$

Vale lembrar que as equações de Stokes governam o escoamento da emulsão na escala da gota, onde $Re \ll 1$ e $Pe \gg 1$.

2.2 Tensor de Landau-Batchelor

O objetivo desta seção é apresentar uma equação constitutiva para o tensor de tensões de uma suspensão vista como um meio contínuo e homogêneo. Neste aspecto, torna-se necessário uma escala de comprimento local suficientemente grande para que uma propriedade da suspensão possa ser caracterizada por seu valor médio com sucesso. Por outro lado, deve-se garantir que tal escala seja suficientemente pequena para que possa ser, de fato, analisada como uma escala local do escoamento macroscópico. Em uma primeira análise, a natureza das partículas que compõem a suspensão não é relevante. Este tensor deve conter a contribuição de tensão oriunda da presença da fase dispersa.

O desenvolvimento desta equação constitutiva é aplicada para suspensões estatisticamente homogêneas. Para tanto, é necessário que a média volumétrica da tensão induzida por partículas contidas em um determinado volume seja válida para qualquer outro volume escolhido aleatoriamente nesta suspensão. Satisfeita tal condição, a suspensão pode ser estudada como um fluido contínuo equivalente. Casos em que os efeitos de inércia são relevantes não se enquadram nesta análise e uma abordagem de escoamento multifásico deve ser adotada. Dessa forma, o tensor de tensões médio de uma suspensão pode ser escrito como

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma} dV, \quad (2.13)$$

em que V é o volume de integração, que deve conter um número suficiente de partículas para que a hipótese do contínuo possa ser assegurada. Todavia, V não pode ser muito grande garantindo que flutuações de propriedades na escala macroscópica do escoamento não sejam computadas. Este volume de integração pode ser dividido em duas partes, considerando a fase contínua e a fase dispersa da emulsão, como segue

$$V = V_f + \sum_{\alpha=1}^N V_\alpha \quad (2.14)$$

onde V_f é o volume de fluido da fase contínua, V_α é o volume de cada partícula contida em V , e N é o número total de partículas. Agora, considerando que o fluido da fase contínua é Newtoniano, a equação (2.13) pode ser reescrita na assim:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_f} \left[-p \mathbf{I} + 2\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \right] dV + \frac{1}{V} \sum_{\alpha=1}^N \int_{V_\alpha} \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (2.15)$$

Por meio da identidade vetorial $\nabla \cdot (\mathbf{x} \boldsymbol{\sigma}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{x} + \boldsymbol{\sigma}^T$, sendo o tensor $\boldsymbol{\sigma}$ simétrico, ou seja, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$ e as partículas livres de efeitos de inércia e forças de campo, $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$, então

$$\int_{V_\alpha} \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{V_\alpha} \nabla \cdot (\mathbf{x} \boldsymbol{\sigma}) dV. \quad (2.16)$$

Além disso, sendo a média do gradiente de velocidades dada por

$$\langle \nabla \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \nabla \mathbf{u} dV = \frac{1}{V} \int_{V_f} \nabla \mathbf{u} dV + \frac{1}{V} \sum_{\alpha=1}^N \int_{V_\alpha} \nabla \mathbf{u} dV. \quad (2.17)$$

Aplicando o teorema da divergência de Gauss ao último termo da equação (2.17), onde $\int_{V_\alpha} \nabla \mathbf{u} dV = \int_{S_\alpha} \mathbf{u} \mathbf{n} dS$, resulta em

$$\frac{1}{V} \int_{V_f} \nabla \mathbf{u} dV = \langle \nabla \mathbf{u} \rangle - \frac{1}{V} \sum_{\alpha=1}^N \int_{S_\alpha} \mathbf{u} \mathbf{n} dS. \quad (2.18)$$

Usando a mesma lógica, pode-se escrever uma expressão parecida para o tensor gradiente de velocidades transposto,

$$\frac{1}{V} \int_{V_f} \nabla \mathbf{u}^T dV = \langle \nabla \mathbf{u}^T \rangle - \frac{1}{V} \sum_{\alpha=1}^N \int_{S_\alpha} \mathbf{n} \mathbf{u} dS. \quad (2.19)$$

Com isso, substituindo os resultados obtidos em (2.19), (2.18) e (2.16) na equação (2.15) obtém-se

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = -\langle p \rangle \mathbf{I} + \mu \left(\langle \nabla \mathbf{u} \rangle + \langle \nabla \mathbf{u}^T \rangle \right) + \frac{1}{V} \sum_{\alpha=1}^N \int_{S_\alpha} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \mathbf{x} - \mu(\mathbf{u} \mathbf{n} + \mathbf{n} \mathbf{u}) dS, \quad (2.20)$$

ou ainda, sendo $n = N/V$ o número de densidade médio de partículas, é possível mostrar que

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = -\langle p \rangle \mathbf{I} + 2\mu \langle \mathbf{E} \rangle + \frac{n}{N} \sum_{\alpha=1}^N \int_{S_\alpha} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \mathbf{x} - \mu(\mathbf{u} \mathbf{n} + \mathbf{n} \mathbf{u}) dS. \quad (2.21)$$

Dessa forma, define-se o tensor de tensões adicional devido à presença de partículas no escoamento da seguinte forma

$$\boldsymbol{\sigma}^d = \frac{n}{N} \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{S}_\alpha, \quad (2.22)$$

onde

$$\mathbf{S}_\alpha = \int_{S_\alpha} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \mathbf{x} - \mu(\mathbf{u} \mathbf{n} + \mathbf{n} \mathbf{u}) dS. \quad (2.23)$$

Este tensor é conhecido na literatura como tensor de Landau-Batchelor (Batchelor, 1970) e, depende do tamanho, da forma, da orientação e da distribuição das partículas. Assim, fica evidente que a presença de partículas, como gotas, imersas em um fluido Newtoniano gera uma contribuição no tensor de tensões global do fluido contínuo e equivalente da suspensão. Mesmo que os efeitos de inércia devam ser desprezados nas vizinhanças da gota, isto não significa que o escoamento da suspensão na escala macroscópica deva ser analisado da mesma maneira. De fato, nesta escala, a equação governante para o fluido contínuo equivalente preserva os termos

de inércia da (2.2) e adiciona a contribuição do fluxo líquido de quantidade de movimento da fase dispersa, $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^d$. Com isso, esta equação pode ser escrita da seguinte forma

$$\rho \frac{D \langle \mathbf{u} \rangle}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^N + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^d + \rho \mathbf{g}. \quad (2.24)$$

2.3 Teoria de pequenas deformações para uma emulsão

Ao lidar com microgotas Newtonianas dispersas em um fluido Newtoniano em regimes de escoamento de baixo número de Reynolds, os parâmetros físicos relevantes são a viscosidade do fluido ambiente, μ , a viscosidade da gota, $\lambda\mu$, o coeficiente de tensão superficial, σ , o raio da gota não deformada e a intensidade do escoamento do fluido na escala macroscópica. Destes parâmetros surgem dois parâmetros adimensionais que são o número de capilaridade, Ca , e a razão de viscosidades. O número de capilaridade representa um balanço entre os efeitos de forças viscosas e forças interfaciais (Maffettone & Minale, 1998). Em outras palavras, este número retrata uma relação entre o tempo de relaxação devido à tensão superficial, $\tau_\sigma \sim \mu a / \sigma$, e o tempo convectivo do escoamento não perturbado, $\tau_e \sim 1 / \dot{\gamma}_c$ (Oliveira, 2007). Isto significa que para $Ca \ll 1$ as forças viscosas provenientes da taxa de cisalhamento imposta sobre a emulsão são pequenas quando comparadas com as forças de tensão superficial na interface gota-fluido e a geometria da gota se desvia muito pouco da forma esférica. Quando uma emulsão é submetida a um escoamento cisalhante simples, os efeitos viscosos que agem sobre a superfície da gota modificam a sua geometria e esta mudança é percebida por ela apenas temporariamente, de modo que a sua memória relacionada à deformação é muito curta. Com isso, o tempo para a gota se deformar é muito maior que o tempo de relaxação da tensão de superfície. Por outro lado, quando $Ca \sim 1$ o tempo de relaxação é da mesma ordem que o tempo de ação do escoamento de tal forma que o fluido equivalente apresenta uma memória semelhante a de um fluido não Newtoniano (Carvalho, 2008). Em casos em que $Ca \gg 1$ a memória da emulsão relacionada a deformação é muito grande de modo que a deformação da gota prevalece e os desvios do formato esférico da mesma são mais expressivos, podendo até rompê-la.

A razão de viscosidades, λ , também retrata o comportamento geométrico de uma gota imersa em uma emulsão. Pela própria definição temos que para $\lambda \gg 1$ a viscosidade da fase dispersa é muito maior que a da fase contínua e, conseqüentemente, o formato da gota é praticamente esférico para qualquer número de capilaridade (Maffettone & Minale, 1998). Neste caso, recai-se em um problema típico de pequenas deformações em que a gota gira muito mais rápido do que se deforma. Ela gira, inclusive, com a mesma velocidade angular (ou vorticidade) do escoamento não perturbado (Oliveira, 2007). Por outro lado, para os casos em que $\lambda \ll 1$, a viscosidade do fluido ambiente é dominante sobre a da fase dispersa e, com isso, a gota se deforma bastante mesmo para pequenos números de capilaridade. Neste caso, as gotas por se deformarem muito, contribuem para o surgimento de um comportamento não Newtoniano ou viscoelástico da emulsão. A deformação e a orientação destas gotas retêm parte da difusão

da quantidade de movimento entre as camadas de fluido, caracterizando um comportamento pseudo-plástico (*shear-thinning*) da emulsão (Carvalho, 2008). Emulsões diluídas ($\phi \leq 0,3$) com altas razões de viscosidades ($\lambda \gg 1$) compõem o cenário de estudo da reologia de pequenas deformações.

2.3.1 Equação evolutiva para a forma da gota

Nesta seção o objetivo é determinar uma equação constitutiva para a evolução do formato de uma gota imersa e convectada por um escoamento cisalhante simples. A partir do momento em que o fluido ambiente é colocado em movimento, em relação à partícula, diferenças de tensões normais são impostas à superfície da gota, desviando-a de seu formato esférico inicial. Dentro do cenário de pequenas deformações, para $Re_a \ll 1$ e $Pe_a \gg 1$, o escoamento não perturbado, \mathbf{u}_∞ , nas proximidades da gota pode ser aproximado por uma série de Taylor desprezando os termos $\mathcal{O}(a/l)^2$, onde l representa uma escala local de comprimento, sendo $l \gg a$ (Rallison, 1984). Assim,

$$\mathbf{u}_\infty(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}(\mathbf{0}) + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{x}, \quad (2.25)$$

em que \mathbf{x} é o vetor posição medido a partir do centro da gota e $\mathbf{u}(\mathbf{0})$ é a velocidade do escoamento na posição ocupada pela gota. Caso a velocidade da gota seja igual à velocidade do escoamento na posição $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, então o escoamento desenvolvido pelo fluido ambiente e imposto sobre as partículas é do tipo cisalhante, com taxa de cisalhamento característico $\dot{\gamma}_c$ (Almeida, 1998). Nesse caso, a gota é convectada pelo escoamento.

Em escoamentos de Stokes, pelo postulado da segunda lei de Newton, a força hidrodinâmica é proporcional à velocidade relativa entre a partícula e o fluido. Dessa forma, $\mathbf{F} \propto \mathbf{U} - \mathbf{u}$, onde \mathbf{U} é a velocidade da partícula ou gota, e $\mathbf{u}(\mathbf{0})$ é a velocidade do escoamento na posição ocupada por esta partícula. Sendo $\mathbf{F} \approx \mathbf{0}$, então $\mathbf{U} \approx \mathbf{u}(\mathbf{0})$, o que significa que a gota é convectada ao longo do escoamento. Adotando um referencial que translada com a gota, tem-se que $\mathbf{U} = \mathbf{0}$ e, portanto, $\mathbf{u} \approx 0$. Assim, o campo de escoamento não perturbado nas proximidades da gota (2.25) pode ser reescrito como

$$\mathbf{u}_\infty(\mathbf{x}) = \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{E} + \mathbf{W}) \cdot \mathbf{x}. \quad (2.26)$$

Deseja-se analisar a distorção de primeira ordem da gota em estudo causada por este escoamento. Para tanto, é preciso obter uma equação que descreva a superfície da gota ao longo do tempo. Em um estudo de pequenas deformações, tem-se que o raio da gota varia de acordo com

$$r(t) = a + \delta r(t), \quad (2.27)$$

em que $\delta r(t)$ é a variação da forma da gota em relação a esfera. Da Mecânica dos Meios Contínuos, $\delta r(t) = ea$, sendo e a elongação normal por unidade de comprimento sofrida por um arco material de comprimento ds_0 em processo de deformação. Este parâmetro é dado por

$$e = \frac{ds - ds_0}{ds_0}, \quad (2.28)$$

em que ds e ds_0 são comprimentos de arcos diferenciais antes e após a deformação.

Expressando a deformação de um arco material em termos do tensor *gradiente de deformação* \mathcal{F} , cujas componentes são $F_{ij} = \partial x_i / \partial x_{0j}$, obtém-se

$$d\mathbf{x} = \mathcal{F} \cdot d\mathbf{x}_o, \quad (2.29)$$

em que $d\mathbf{x}$ representa vetorialmente a variação de comprimento de um arco material de tamanho ds_0 após sofrer uma transformação. Esta transformação é caracterizada pela projeção do tensor gradiente de deformação na direção \mathbf{x}_0 .

Seja $\eta = ds/ds_0$, em regimes de pequenas deformações, mostra-se a partir de (2.29) que (Oliveira, 2007)

$$\eta = 1 + \frac{\mathbf{x}}{r} \cdot \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{x}}{r} + \frac{3}{2} \frac{\mathbf{x}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{A} : \mathbf{x}\mathbf{x}}{r^4} + \dots, \quad (2.30)$$

em que η é a elongação, $r = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$ e \mathbf{A} é um tensor de segunda ordem, positivo e simétrico, que define a geometria da gota, também conhecido como tensor de Green ou tensor de distorção. De (2.28) temos que $e = ds/ds_0 - 1$ e $e = \eta - 1$, de forma que $r(t) = a + ae = a(1 + e) = a\eta$. Assim, define-se a equação da superfície da gota como sendo $S(t) = r(t) - a\eta$, ou seja,

$$S(t) = r(t) - a \left(1 + \frac{\mathbf{x}}{r} \cdot \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{x}}{r} + \frac{3}{2} \frac{\mathbf{x}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{A} : \mathbf{x}\mathbf{x}}{r^4} + \dots \right). \quad (2.31)$$

O termo $\frac{\mathbf{x}}{r} \cdot \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{x}}{r}$ representa a primeira correção da deformação da superfície da gota com relação à sua configuração esférica inicial para uma outra elipsoidal. No limite de altas razões de viscosidade, as deformações sofridas pela gota são muito pequenas, de modo que esta primeira correção da geometria já é suficiente para descrever o comportamento da superfície. Com isso, a equação da superfície da gota se reduz a

$$S(t) = r(t) - a \left(1 + \frac{\mathbf{x}}{r} \cdot \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{x}}{r} \right). \quad (2.32)$$

À luz da hipótese do contínuo, aplica-se a condição de contorno cinemática da superfície da partícula, tal que $DS(t)/Dt = 0$. Isto significa que a superfície material é sempre formada pelas mesmas partículas em todas as fases do movimento. Considerando apenas os termos de $\mathcal{O}(1)$ e $\mathcal{O}(1/\lambda)$, obtém-se a seguinte relação

$$\frac{Dr}{Dt} - a \frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{x}}{r} \cdot \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{x}}{r} \right) = 0. \quad (2.33)$$

Note, portanto, que a teoria é $\mathcal{O}(\lambda^{-2})$.

Aplicando o conceito de derivada material $D()/Dt = \partial()/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla()$ aos termos da equação (2.33), obtemos para o primeiro termo que

$$\frac{Dr}{Dt} = \frac{D(\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}})}{Dt} = (\mathbf{x}/r) \cdot D(\mathbf{x})/Dt = (\mathbf{x}/r) \cdot \mathbf{u}^s,$$

em que \mathbf{u}^s é a velocidade analisada na superfície da gota, oriunda da restrição imposta pela condição de contorno. Sabe-se que \mathbf{x}/r é um vetor unitário e que sua derivada é dada por

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{x}}{r} \right) = \omega_x \times \frac{\mathbf{x}}{r}, \quad (2.34)$$

em que ω_x é a velocidade angular a que o vetor unitário \mathbf{x}/r está sujeito. Com isso, aplicando-se estes conceitos em (2.33) e sabendo-se que para altas razões de viscosidades a velocidade angular da gota é aproximadamente a mesma do escoamento não perturbado, ou seja, $\omega_x \times \frac{\mathbf{x}}{r} \approx \mathbf{w} \times \frac{\mathbf{x}}{r} = \mathbf{W} \cdot \frac{\mathbf{x}}{r}$, em que ω é a velocidade angular do escoamento não perturbado, tem-se que

$$a \left[\mathbf{W} \cdot \frac{\mathbf{x}}{r} \cdot \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{x}}{r} + \frac{\mathbf{x}}{r} \cdot \frac{D\mathbf{A}}{Dt} \cdot \frac{\mathbf{x}}{r} + \frac{\mathbf{x}}{r} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{W} \cdot \frac{\mathbf{x}}{r} \right] = \frac{\mathbf{x}}{r} \cdot \mathbf{u}^s. \quad (2.35)$$

Como \mathbf{W} é um tensor antissimétrico, ou seja, $\mathbf{W} \cdot \frac{\mathbf{x}}{r} = -\frac{\mathbf{x}}{r} \cdot \mathbf{W}$, a equação (2.35) pode ser rearranjada da seguinte forma:

$$a \frac{\mathbf{x}}{r} \cdot \left(\frac{D\mathbf{A}}{Dt} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{W} \right) \cdot \frac{\mathbf{x}}{r} = \frac{\mathbf{x}}{r} \cdot \mathbf{u}^s. \quad (2.36)$$

Na equação (2.36), é possível identificar a derivada corrotativa de Jaumman do tensor \mathbf{A} , que denota a taxa de variação de \mathbf{A} a partir de um referencial que translada e gira com a partícula. Esta derivada é dada por

$$\frac{\mathfrak{D}\mathbf{A}}{\mathfrak{D}t} = \left(\frac{D\mathbf{A}}{Dt} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{W} \right). \quad (2.37)$$

Gotas em casos de elevadas razões de viscosidade e submetidas à escoamentos rotacionais, $a/r \approx 1$, e assim, a equação (2.36) pode ser simplificada resultando em

$$\mathbf{x} \cdot \frac{\mathfrak{D}\mathbf{A}}{\mathfrak{D}t} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}^s. \quad (2.38)$$

Note que (2.38) é uma equação evolutiva para \mathbf{A} com base na velocidade do escoamento na superfície da gota \mathbf{u}^s . Portanto, para analisar o comportamento da geometria da gota é preciso encontrar uma expressão para \mathbf{u}^s . Para tanto, uma solução é elaborada para o campo de velocidade sobre a superfície da gota pela superposição de funções harmônicas esféricas (Lamb, 1932) em que

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{x} + \frac{a^3}{r^3} \mathbf{d} \times \mathbf{x} + \frac{a^3}{r^5} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{x} \\ & + \frac{2a^5}{r^5} \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} - \frac{5a^5}{r^7} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

de modo que

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})|_{r=a} = & -p_1 \mathbf{n} + 2\mu \{ \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} + [\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} - 4(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] \} \\ & + 2\mu \{ -8\mathbf{C} \cdot \mathbf{n} + 20(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - 3\mathbf{D} \times \mathbf{n} \}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

se $\mathbf{x} \notin V$, para o escoamento fora da gota, e

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} \times \mathbf{x} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} + \frac{5r^2}{a^2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{x} - \frac{2}{a^2} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{x}, \quad (2.41)$$

tal que

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})|_{r=a} = -p_2 \mathbf{n} + 2\lambda\mu \{ \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} + [8\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} - (19/2)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] \}, \quad (2.42)$$

se $\mathbf{x} \in V$, ou seja, para o escoamento interno à gota. Nestas equações, V é o volume da gota e \mathbf{E} é o tensor taxa de deformação. Os outros componentes como os tensores \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{F} e \mathbf{G} e os vetores \mathbf{d} e \mathbf{w} , são determinados pelas condições de contorno na superfície da gota não deformada, sendo elas:

1. continuidade de velocidades: $[\mathbf{u}]^s = \mathbf{0}$ onde a notação $[\]^s$ representa um salto de propriedades através da superfície da gota;
2. continuidade de tensões: o salto de tensões através da superfície da gota é dado por $\Delta \mathbf{f}$ em que $\Delta \mathbf{f} = [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}]^s$. A projeção do vetor $\Delta \mathbf{f}$ na direção normal, $\Delta \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$, é uma grandeza escalar que representa um salto de tensões normais pela superfície. A subtração do salto de tensões normais através da superfície do salto de tensões global, $\Delta \mathbf{f}$, fornece o salto de tensões tangenciais através desta mesma superfície. Matematicamente,

$$\Delta \mathbf{f} - (\Delta \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = \Delta \mathbf{f} \cdot \mathbf{I} - \Delta \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \mathbf{n} = \Delta \mathbf{f} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{n} \mathbf{n}),$$

em que \mathbf{I} é o tensor identidade e $\Delta \mathbf{f} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{n} \mathbf{n})$ é o salto de tensões tangenciais através da superfície em estudo. Neste trabalho serão consideradas gotas com coeficientes de tensão superficial constante (homogêneas) na superfície isto é, não há gradiente de temperatura ou concentração de surfactantes na superfície. Desta forma, apenas o salto de tensões normais é observado, sendo este dado pela lei de Young-Laplace (Clift et al., 1978), tal que $\Delta \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = 2\bar{\kappa}\sigma \mathbf{n}$, em que κ é a curvatura média da gota e σ é o coeficiente de tensão superficial. Não são observadas variações de tensão tangencial, tal que $\Delta \mathbf{f} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{n} \mathbf{n}) = \mathbf{0}$.

Os termos envolvidos na aplicação das condições de contorno são todos avaliados na superfície da gota. Com isso, em grande parte dos casos, $\mathbf{x} = a\mathbf{n}$ e $r = a$. A exceção é o termo $\Delta \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$ em que efeitos de primeira ordem da deformação da gota são considerados. Neste caso, para o cálculo da curvatura média, dada por $\bar{k} = (1/2) \nabla^s \cdot \mathbf{n}$, a relação $\bar{k} \sim \frac{1}{a} + \frac{2}{a^3} \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ é obtida considerando que a gota deforma-se segundo a equação (2.31). O termo $\nabla^s = (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}) \cdot \nabla$ é o gradiente projetado na superfície.

Após a aplicação das condições de contorno (1) e (2), a expressão para \mathbf{u}^s é dada por

$$\mathbf{u}^s = \mathbf{W} \cdot \mathbf{x} + \frac{5}{2\lambda + 3} \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} - \frac{\sigma}{\mu a} \frac{40(\lambda + 1)}{(19\lambda + 16)(2\lambda + 3)} \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}. \quad (2.43)$$

As funções racionais de λ são expandidas em séries de potência de $1/\lambda$ com base em um limite assintótico de altas razões de viscosidade. Truncar essas séries nos termos de primeira ordem resulta em $\frac{5}{2\lambda + 3} \sim \frac{5}{2\lambda}$ e $\frac{40(\lambda + 1)}{(19\lambda + 16)(2\lambda + 3)} \sim \frac{40(\lambda)}{(19\lambda)(2\lambda)} \sim \frac{20}{(19\lambda)}$ e a equação (2.43) torna-se:

$$\mathbf{u}^s = \left(\mathbf{W} + \frac{5}{2\lambda} \mathbf{E} - \frac{\sigma}{\lambda \mu a} c \mathbf{A} \right) \cdot \mathbf{x}, \quad (2.44)$$

em que $c = \frac{20}{19}$. Sendo $\mathbf{x} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{W} : \mathbf{x}\mathbf{x} = 0$, pois \mathbf{W} é um tensor antissimétrico e $\mathbf{x}\mathbf{x}$ é simétrico, é possível mostrar a partir de (2.38) que

$$\frac{\mathfrak{D}\mathbf{A}}{\mathfrak{D}t} = \frac{5}{2\lambda} \mathbf{E} - \frac{\sigma}{\lambda \mu a} c \mathbf{A}. \quad (2.45)$$

Como $\mathbf{x} = a\mathbf{n}$, \mathbf{A} é um tensor homogêneo sobre a superfície da gota, ou seja, $\nabla \mathbf{A} = 0$ e, assim, a derivada material deste tensor recai para a sua derivada ordinária $d\mathbf{A}/dt$. Portanto, a equação evolutiva para a forma da superfície da gota pode ser escrita como

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{W} + \frac{5}{2\lambda} \mathbf{E} - \frac{\sigma}{\lambda \mu a} c \mathbf{A}. \quad (2.46)$$

A equação (2.46) refere-se ao comportamento da emulsão na escala da gota onde o escoamento é visto como bifásico. Nesta equação o tensor de distorção \mathbf{A} computa como a geometria da gota evolui ao longo do tempo.

2.3.2 Tensão induzida pela fase dispersa

No estudo das emulsões monodispersas infinitamente diluídas, os efeitos do tensor de tensões na superfície de cada gota devem ser considerados. Mudanças na geometria da gota devido a ação de um escoamento cisalhante propagam-se para a escala macroscópica da emulsão, gerando variações significativas da quantidade de movimento da fase contínua. Desta forma, o tensor de tensões da emulsão equivalente deve conter um novo termo, denominado tensor médio, que incorpore estas contribuições provenientes da fase dispersa.

A tensão induzida por uma gota pode ser determinada pela integral (2.23) sobre a superfícies S^α ou qualquer outra superfície que englobe a gota e que não contenha outras partículas (Batchelor, 1970). Para emulsões diluídas, em que $\phi \ll 1$, o distúrbio de velocidade provocado por uma gota não altera o escoamento nas proximidades das gotas em sua vizinhança. Assim, neste contexto, o escoamento ao redor de uma gota não é influenciado pelas demais.

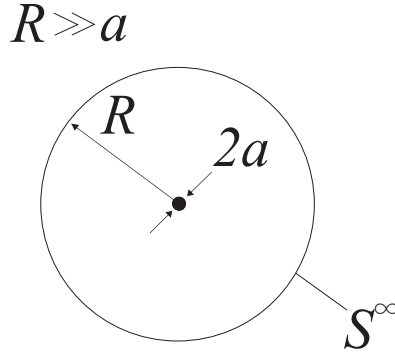


Figura 1 – Diagrama de uma emulsão monodispersa e diluída, em que a é o raio da gota.

Escolhendo uma superfície de raio R , S^∞ , em que $R \gg a$, temos que $\mathbf{un} = \mathbf{nu}$, de tal forma que a integral (2.23) pode ser reescrita na forma

$$\int_{S^\alpha} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \mathbf{x} - \mu(\mathbf{un} + \mathbf{nu}) dS = \int_{S^\infty} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \mathbf{x} - 2\mu \mathbf{nu} dS. \quad (2.47)$$

Para a determinação dos termos do integrando, recorre-se mais uma vez a solução de Lamb, dada por (2.40) e (2.41), em que as soluções são escritas em termos de funções vetoriais harmônicas. Neste caso, a superfície S^∞ é esférica, de raio R , de modo que $\mathbf{x} = R\mathbf{n}$ e que relações de ortogonalidade podem ser utilizadas. Considerando que a diluição da emulsão deve ser tal que S^∞ possa ser definida de modo que os termos $\mathcal{O}(R^{-1})$ possam ser desprezados, é possível mostrar que (Oliveira, 2007)

$$\mathbf{S}_\alpha = -2\mu \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right) \mathbf{B}. \quad (2.48)$$

Nesta equação, \mathbf{B} é um tensor de forma que aparece na solução de Lamb do escoamento de Stokes com simetria esférica. Frankel & Acrivos (1970) determinaram este tensor de forma como sendo

$$\mathbf{B} = -\frac{5(\lambda - 1)}{2\lambda + 3} \mathbf{E} - \frac{4}{(2\lambda + 3)} \frac{\sigma}{\mu a} \mathbf{A} - \frac{30(\lambda - 1)^2}{7(2\lambda + 3)^2} \mathcal{F}[\mathbf{A}, \mathbf{E}], \quad (2.49)$$

em que $\mathcal{F}[\mathbf{A}, \mathbf{E}] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} - \frac{2}{3} (\mathbf{A} : \mathbf{E}) \mathbf{I}$. Vale lembrar que a expressão para o tensor \mathbf{B} leva em conta condições de contorno de gota deformada e não apenas sobre $r = a$.

No contexto da teoria de pequenas deformações, no limite de alta razões de viscosidade λ , as funções racionais de λ podem ser expandidas em séries de $1/\lambda$. Dessa forma, tem-se que

$5(\lambda - 1)/(2\lambda + 3) \sim 5/2 - 25/(4\lambda)$, $4/(2\lambda + 3) \sim 2/\lambda$ e $30(\lambda - 1)^2/7(2\lambda + 3)^2 \sim 15/14$. O resultado desta expansão reduz a expressão para \mathbf{B} como segue

$$\mathbf{B} = -\left(\frac{5}{2} - \frac{25}{4\lambda}\right) \mathbf{E} - 2\frac{\sigma}{\lambda\mu a} \mathbf{A} - \frac{15}{14} \mathcal{F}[\mathbf{A}, \mathbf{E}], \quad (2.50)$$

Sabe-se da equação (2.22) que $\boldsymbol{\sigma}^d = n(1/N) \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{S}_\alpha$. Para uma emulsão monodispersa e diluída, o número de partículas dentro da superfície S^∞ é $N = 1$ e, com isso, $(1/N) \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{S}_\alpha = \mathbf{S}_\alpha$. Considerando a definição do número de densidade médio de partículas como sendo $n = 3\phi/(4\pi a^3)$ (Schowalter et al., 1968) e igualando-se as equações (2.22) e (2.48) é possível mostrar que

$$\boldsymbol{\sigma}^d = \phi\mu \left[\left(5 - \frac{25}{2\lambda}\right) \mathbf{E} + 4\frac{\sigma}{\lambda\mu a} \mathbf{A} + \frac{15}{7} \mathcal{F}[\mathbf{A}, \mathbf{E}] \right]. \quad (2.51)$$

A equação (2.51) retrata como a presença de microgotas na microescala influenciam o comportamento do tensor de tensões da emulsão vista na macroescala. O tensor adicional $\boldsymbol{\sigma}^d$ define a tensão induzida pela fase dispersa.

2.4 Modelo constitutivo completo de uma emulsão

O modelo constitutivo completo de uma emulsão é formado por duas equações, (2.46) e (2.51), respectivamente, repetidas a seguir

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{W} + \frac{5}{2\lambda} \mathbf{E} - \frac{\sigma}{\lambda\mu a} c\mathbf{A}, \\ \boldsymbol{\sigma}^d = \phi\mu \left[\left(5 - \frac{25}{2\lambda}\right) \mathbf{E} + 4\frac{\sigma}{\lambda\mu a} \mathbf{A} + \frac{15}{7} \mathcal{F}[\mathbf{A}, \mathbf{E}] \right]. \end{array} \right. \quad (2.52)$$

O presente trabalho utiliza este modelo de equações como base para a formulação analítica da equação do movimento dentro da camada limite de uma emulsão escoando sobre uma placa plana. As simplificações referentes à teoria da camada limite serão incorporadas aos tensores taxa de deformação e vorticidade, \mathbf{E} e \mathbf{W} , respectivamente, no cálculo do tensor distorção \mathbf{A} . O resultado obtido desta simplificação será utilizado para a determinação do tensor de tensões adicional, $\boldsymbol{\sigma}^d$, definido pela equação (2.51). Finalmente, tendo o tensor de tensões adicional calculado, um modelo de equação do movimento proposto neste trabalho pode ser obtido. Estes desenvolvimentos serão abordados no próximo capítulo.

3 Equações da Camada Limite

Ao final do século XIX a ciência da mecânica dos fluidos podia ser vista como um grande tronco com duas ramificações principais, uma relacionada a parte teórica do estudo da hidrodinâmica e a outra embasada em resultados experimentais chamada de hidráulica. A priori, estes dois campos de estudo não apresentavam pontos em comum (Schlichting, 1979). Por um lado, a teoria hidrodinâmica baseava-se nas equações de Euler para descrever um escoamento de um fluido invíscido e já apresentava um elevado grau de desenvolvimento. No entanto, esta teoria não era capaz de explicar resultados experimentais como o arrasto de um corpo sólido movendo-se em uma massa de fluido ou a perda de carga de um escoamento por uma tubulação. Com isso, engenheiros de campo buscavam uma forma de contornar tal situação para tentar explicar ou entender estes fenômenos que de certa forma faziam parte de seu dia a dia. Nesse aspecto, foi elaborada uma ciência altamente experimental que descrevia e resolvia problemas práticos que não eram, até então, previstos pela teoria hidrodinâmica de um fluido invíscido. Esta ciência recebeu o nome de hidráulica. Foi neste cenário que, no começo do século XX, L. Prandtl se destacou ao mostrar que, de fato, estes dois ramos da dinâmica dos fluidos têm muita coisa em comum a ponto de poderem ser unificados. Até mesmo antes de Prandtl os estudiosos do assunto já reconheciam que as discrepâncias entre a teoria e os resultados experimentais estavam associados ao fato da teoria hidrodinâmica da época não dar a devida atenção aos efeitos viscosos. De fato, os dois principais fluidos que a natureza apresentou para o homem, a água e o ar, possuem viscosidades muito baixas o que tornava ainda mais difícil a compreensão do problema de como a viscosidade podia ser tão determinante nas características do escoamento de um fluido. Além disso, as dificuldades inerentes à solução das equações do movimento de um fluido viscoso, as equações de Navier-Stokes, formavam um barreira para o progresso dos estudos nesta área. Em 1904, ao defender um artigo chamado “*Fluid Motion with Very Small Friction*” perante o público de um congresso matemático em Heidelberg, Prandtl provou que o escoamento ao redor de um corpo sólido pode ser dividido em duas regiões: uma fina camada nas vizinhanças do contorno sólido, chamada de camada limite (*Boundary Layer*), onde os efeitos viscosos são importantes, e a região restante fora desta camada em que os efeitos viscosos podem ser negligenciados. Com base nestas hipóteses, Prandtl foi capaz de prover um significado físico da importância de escoamentos viscosos, conseguindo, ao mesmo tempo, um elevado grau de simplificação das equações do movimento de um fluido viscoso (Schlichting, 1979). É com base nestas hipóteses e simplificações que este capítulo irá apresentar um estudo a respeito das equações da camada limite aplicado a uma emulsão monodispersa e diluída ao passar sobre uma placa plana e muito fina.

Considere o escoamento de um fluido Newtoniano em contato com uma placa plana,

com ângulo de ataque zero, por exemplo. Na parede, devido à condição de não deslizamento, as partículas de fluido aderem ao contorno sólido e, neste ponto de contato, a sua velocidade é zero. Sabendo-se que o número de Reynolds, Re , é diretamente proporcional à velocidade do escoamento, na parede, o seu valor é zero. Isto significa que nesta região os efeitos difusivos de vorticidade são preponderantes e a viscosidade domina. Longe da parede, na hipótese de que o escoamento tenha elevado número de Re , este é governado pela equação de Euler, desde que os efeitos associados à difusão de momento pela ação da viscosidade sejam desprezíveis.

Com isso, é possível definir uma região onde a velocidade do fluido varia de zero, na parede, onde os efeitos viscosos dominam, até o valor da velocidade do escoamento não perturbado, região em que os efeitos convectivos são governantes. Dessa maneira, é de se esperar que, em algum ponto entre estes dois extremos, os efeitos combinados de difusão e convecção de vorticidade possuam a mesma magnitude. Esta região de equilíbrio define os contornos físicos e teóricos da camada limite. A Figura 2 mostra um diagrama esquemático que retrata a distribuição de velocidade ao longo da placa, com dimensões extrapoladas para fins de visualização do fenômeno descrito, em que δ é a espessura da camada limite, u^∞ é a velocidade do escoamento não perturbado e $u(x, y)$ retrata o perfil de velocidade dentro desta fina camada.

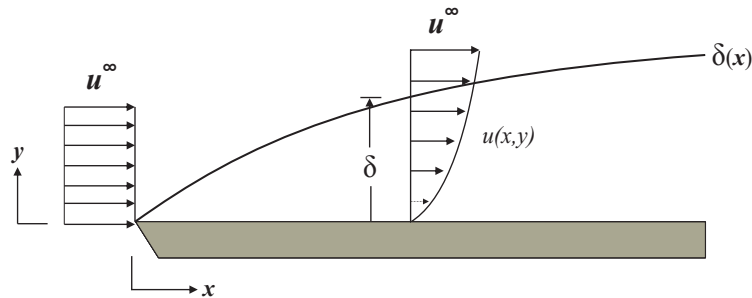


Figura 2 – Diagrama esquemático mostrando o formato e principais componentes da camada limite

Continuando o estudo das conclusões obtidas por Prandtl em 1904, imaginemos, por questões de simplicidade, ainda um escoamento paralelo a uma placa. Sabe-se que fora da camada limite os efeitos de inércia são muito mais importantes que os efeitos viscosos e o fluido pode ser considerado como invíscido. No entanto, dentro da camada limite estes efeitos devem ser da mesma ordem de grandeza de tal forma que exista um balanço entre eles, retratado pelo número de Reynolds. Da equação do movimento de um fluido Newtoniano tira-se que $F_i \sim \rho U^2/L$ e $F_\mu \sim \mu U/\delta^2$ representam as escalas das forças de inércia e viscosas, respectivamente (Schlichting, 1979). Com isso, dentro da camada limite temos que,

$$\mathcal{O}\left(\frac{F_i}{F_\mu}\right) \sim 1, \quad (3.1)$$

quando o número de Reynolds do escoamento, como um todo, é elevado. Isso porque, por definição, a camada limite é uma fina camada muito próxima às vizinhanças de um contorno sólido em que o gradiente de velocidade normal à parede, $\partial u/\partial y$ é muito grande. Dessa forma, da relação (3.1) podemos escrever que

$$\mathcal{O}\left(\frac{\delta^2}{L^2} \frac{UL}{\nu}\right) \sim 1, \quad (3.2)$$

em que UL/ν é o número de Reynolds, Re_L , na escala macroscópica e $\nu = \mu/\rho$ é a viscosidade cinemática do fluido. Vale lembrar que a viscosidade cinemática do fluido representa um índice de difusão de vorticidade. Com isso, para elevados números de Reynolds, mostra-se da equação (3.2) que

$$\delta/L \sim 1/\sqrt{Re_L}.$$

Desta relação é possível verificar que a espessura da camada limite, δ^1 , é proporcionalmente a $\sqrt{\nu}$. Sendo assim, Prandtl mostrou que se $Re_L \gg 1$, então a razão $\delta/L \ll 1$; e, por este motivo, as soluções obtidas das equações de camada limite possuem um carácter assintótico. Esta relação será a hipótese simplificadora das equações do movimento do problema da camada limite bidimensional e em regime permanente sobre uma placa plana.

As equações que governam o movimento de um fluido Newtoniano em escoamento bidimensional, incompressível, em regime permanente e sobre uma placa plana, são dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.3)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (3.4)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (3.5)$$

em que (3.3) representa a equação da continuidade, (3.4) e (3.5) são as componentes da equação do movimento nas direções \mathbf{x} e \mathbf{y} , respectivamente. Considere agora o mesmo problema da camada limite sobre uma placa plana em que as mesmas escalas características usadas para o balanço de forças de inércia e viscosas são válidas. Da equação da continuidade (3.3) temos que $\mathcal{O}\left(\frac{\|\partial u/\partial x\|}{\|\partial v/\partial y\|}\right) = 1$, ou seja,

$$\frac{U}{L} \sim \frac{v}{\delta} \rightarrow v = \mathcal{O}\left[U \left(\frac{\delta}{L}\right)\right].$$

¹ A espessura da camada limite, em geral, varia com a posição ao longo da placa, e δ deve ser vista como uma espessura média (Batchelor, 1970).

Dessa forma, sabendo-se que $\delta/L \ll 1$ e aplicando essas escalas características para as componentes da equação (3.4), tem-se que

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\| \ll \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\|. \quad (3.6)$$

Fazendo a mesma análise para a equação (3.5) resulta que todos os termos, exceto $\|\partial p/\partial y\|$, são desprezíveis e, desta equação, resta que $-\partial p/\partial y = 0$, isto é, conclui-se que a pressão varia apenas em função da posição x ao longo da placa. Portanto, as equações de Navier-Stokes para a camada limite reduzem-se a três equações, a saber,

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

As condições de contorno destas equações são definidas em $y = 0$ onde $u = v = 0$ (condição de aderência), e em $y \rightarrow \infty$, em que $u = U(x)$ (Schlichting, 1979).

Neste trabalho, essa mesma abordagem será utilizada para simplificar as equações do movimento obtidas para uma emulsão monodispersa e diluída usando o modelo microhidrodinâmico apresentado no capítulo 2.

3.1 Equações da camada limite para emulsões monodispersas e diluídas

Neste trabalho, o modelo constitutivo (2.52) foi utilizado como ferramenta para a obtenção das equações da camada limite de uma emulsão monodispersa e diluída. Neste modelo, as simplificações propostas por Prandtl foram aplicadas aos próprios tensores constituintes de cada equação, sendo eles, o tensor de Green \mathbf{A} , o tensor taxa de deformação \mathbf{E} e o tensor vorticidade \mathbf{W} . Assumiu-se o escoamento como bidimensional, incompressível, laminar, permanente e sem gradiente de pressão.

Em regime permanente a equação (2.46) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{W} + \frac{5}{2\lambda} \mathbf{E} - \frac{\sigma}{\lambda\mu a} \frac{20}{19} \mathbf{A} = 0. \quad (3.8)$$

Para o caso bidimensional, assume-se que o tensor \mathbf{A} é simétrico. Da equação (2.44) é possível mostrar que, se o escoamento da emulsão é incompressível, então na escala da gota,

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^s = 0, \quad (3.9)$$

o que implica que

$$\mathbf{A} : \mathbf{I} = 0. \quad (3.10)$$

Em outras palavras, a equação (3.10), indica que o traço do tensor \mathbf{A} , $tr(\mathbf{A})$, é nulo para escoamentos de emulsões incompressíveis, ou seja, $A_{11} = -A_{22}$.

Na forma matricial, os tensores, \mathbf{A} , \mathbf{E} e \mathbf{W} podem ser representados como segue

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2\frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 0 \\ -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, da condição de simetria imposta para o tensor \mathbf{A} , temos que $A_{12} = A_{21}$.

Façamos uma análise do $\nabla \cdot \mathbf{E}$ para verificar que simplificar termos da equação do movimento após operar o divergente, o que é feito em geral, é equivalente a simplificar \mathbf{E} e tomar o divergente depois deste passo. Lembrando que as hipóteses simplificadoras da camada limite são $\delta \ll L$ para $Re_L \gg 1$. Assim, para as direções \mathbf{x} e \mathbf{y} é possível mostrar que:

- Direção \mathbf{x} :

Seja

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial x_i} E_{ij} \hat{\mathbf{e}}_j$$

em que,

$$\frac{\partial E_{11}}{\partial x} = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

e

$$\frac{\partial E_{21}}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right).$$

Então, o divergente do tensor taxa de deformação, \mathbf{E} , na direção \mathbf{x} será

$$(\nabla \cdot \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_x = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right). \quad (3.11)$$

Agora, fazendo uma análise de escala para os termos da parcela $\partial E_{21}/\partial y$ mostra-se que, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{U}{\delta^2}$ e $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \sim \frac{U\delta}{L^3}$, de tal forma que

$$\frac{\left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right\|}{\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\|} = \left(\frac{\delta}{L} \right)^3 \ll 1,$$

portanto,

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\| \gg \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right\|,$$

assim como

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\| \gg \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|. \quad (3.12)$$

Agora, comparando a ordem de grandeza do termo restante de $\partial E_{21}/\partial y$, $\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\|$, com o obtido para $\partial E_{11}/\partial x$, $\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|$, obtemos a seguinte relação

$$\frac{\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|}{\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\|} = \frac{U}{L^2} \cdot \frac{\delta^2}{U} = \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \ll 1,$$

o que implica que,

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\| \gg \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|,$$

assim como

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\| \gg \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|. \quad (3.13)$$

• Direção \mathbf{y} :

Seja

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial x_i} E_{ij} \hat{\mathbf{e}}_j.$$

Novamente, agora na direção \mathbf{y} , é possível mostrar desta relação que

$$\frac{\partial E_{12}}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

e

$$\frac{\partial E_{22}}{\partial y} = 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Portanto, o divergente do tensor taxa de deformação, \mathbf{E} , nesta direção será

$$(\nabla \cdot \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_y = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (3.14)$$

Analisando a parcela $\partial E_{12}/\partial x$ desta relação, da equação (3.12) mostra-se que, de fato,

$$\frac{\partial E_{12}}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Aplicando este resultado e realizando uma análise de escala dos termos obtidos no lado direito da equação (3.14), $\|\partial^2 u/\partial x \partial y\|$ e $\|\partial^2 v/\partial y^2\|$, respectivamente, é possível mostrar que

$$\frac{\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right\|}{\left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\|} = \frac{U}{L\delta} \cdot \frac{L\delta}{U} = 1.$$

Isto indica que ambos os termos são da mesma ordem. Sabendo-se que $\delta/L \ll 1$, o estudo da ordem de grandeza destes termos revela que ambos são desprezíveis, pois, para os dois casos,

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right\| = \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\| = \frac{U}{\delta^2} \cdot \left(\frac{\delta}{L} \right) \ll 1. \quad (3.15)$$

Desta análise percebemos que os termos $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$ são desprezíveis sob as hipóteses da camada limite. Dessa forma, podemos simplificar os tensores taxa de deformação e vorticidade de modo a obter:

$$\mathbf{E} \cong \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e$$

$$\mathbf{W} \cong \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ao tomar o divergente do tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ usando o tensor \mathbf{E} , simplificado, retomamos à equação do movimento em (3.7). Portanto, assumimos, que o mesmo pode ser feito quando $\boldsymbol{\sigma}$ incorporar $\boldsymbol{\sigma}^d$, fornecendo assim um modelo diferencial para o escoamento de camada limite de uma emulsão monodispersa e diluída.

Estes novos tensores são utilizados para a determinação do tensor distorção \mathbf{A} e do tensor de tensões da gota $\boldsymbol{\sigma}^d$. Assim, para a deformação da gota, apenas o termo dominante de cisalhamento $(\partial u / \partial y) = \dot{\gamma}$ é relevante.

3.1.1 Determinação do tensor de distorção da gota \mathbf{A} em função do escoamento

O tensor distorção \mathbf{A} é determinado a partir da equação (3.8). Esta equação gera um sistema linear de equações, que pode ser resolvido para as incógnitas A_{11} e A_{12} , lembrando que \mathbf{A} é simétrico e assim, $A_{12} = A_{21}$. Além disso, devido a condição de incompressibilidade, $tr(\mathbf{A}) = 0$, e portanto, $A_{11} = -A_{22}$. Com o intuito de facilitar o algebrismo e diminuir o tamanho das equações geradas, a equação (3.8) foi reescrita na forma:

$$\mathbf{0} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{A} + c_1 \mathbf{A} - c_2 \mathbf{E},$$

$$\text{em que } c_1 = \frac{20}{19} \frac{\sigma}{\lambda \mu a}, \quad c_2 = \frac{5}{2\lambda}.$$

Ao resolver este sistema de equações o resultado encontrado foi:

$$\begin{cases} A_{11} = -A_{22} = -\frac{c_2 \dot{\gamma}}{2(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)}, \\ A_{12} = A_{21} = \frac{c_1 c_2 \dot{\gamma}}{2(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)}. \end{cases} \quad (3.16)$$

3.1.2 Determinação do tensor de tensões da gota $\boldsymbol{\sigma}^d$ em função do escoamento

A contribuição da fase dispersa para o tensor de tensões equivalente de uma emulsão, $\boldsymbol{\sigma}$, é dada pelo tensor de tensões da fase dispersa, $\boldsymbol{\sigma}^d$. A equação (2.51) define o comportamento deste tensor e pode ser reescrita, de forma simplificada, como

$$\boldsymbol{\sigma}^d = \phi \mu (c_3 \mathbf{E} + c_4 \mathbf{A} + c_5 \mathcal{F}[\mathbf{A}, \mathbf{E}]),$$

$$\text{em que } c_3 = \left(5 - \frac{25}{2\lambda}\right), \quad c_4 = 4 \frac{\sigma}{\lambda \mu a} \text{ e } c_5 = \frac{15}{7}.$$

Utilizando os resultados encontrados em (3.16) as componentes do tensor $\boldsymbol{\sigma}^d$ encontradas foram:

$$\sigma_{11}^d = -\mu\phi \left[\frac{c_2 c_4 \dot{\gamma}^2}{2(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)} - \frac{c_1 c_2 c_5 \dot{\gamma}^2}{6(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)} \right],$$

$$\sigma_{22}^d = -\sigma_{11}^d,$$

$$\sigma_{33}^d = -c_1 c_2 c_5 \mu \phi \frac{\dot{\gamma}^2}{3(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)},$$

$$\sigma_{12}^d = -\mu\phi \left[\frac{c_3 \dot{\gamma}}{2} + \frac{c_1 c_2 c_4 \dot{\gamma}}{2(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)} \right],$$

$$\sigma_{12}^d = \sigma_{21}^d,$$

$$\sigma_{13}^d = \sigma_{32}^d = \sigma_{13}^d = 0.$$

Vale lembrar que este resultado para σ^d é válido para o escoamento dentro de camada limite de uma emulsão monodispersa, diluída, bidimensional, incompressível e sobre uma placa plana. É importante reforçar também que para cada tipo de escoamento, o tensor de tensões adicional tem uma forma explícita diferente. Neste trabalho, o escoamento imposto é do tipo cisalhante simples, caracterizado por $\dot{\gamma} = \partial u / \partial y$.

De posse destes dados, um modelo de equação do movimento para uma emulsão dentro dos domínios da camada limite pôde ser obtido substituindo os resultados encontrados para σ^d na equação do movimento (2.24).

3.1.3 Modelo de Equação da Camada Limite para um emulsão monodispersa e diluída

O modelo de equação de movimento para a camada limite de uma emulsão divide-se em duas expressões, uma para cada direção \mathbf{x} e \mathbf{y} , respectivamente. Neste modelo os efeitos de inércia são desconsiderados.

- Direção \mathbf{x} :

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \mu_B \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \phi \left\{ \frac{1080}{133} \frac{\sigma}{\lambda^2 \mu a} \frac{\dot{\gamma} \dot{\gamma}_x}{(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)} \left[\frac{\dot{\gamma}^2}{(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)} - 1 \right] \right\} \\ & + \mu \phi \left\{ \frac{100}{19} \frac{\sigma^2}{\lambda^3 \mu^2 a^2} \frac{\dot{\gamma}_y}{(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)} \left[1 - \frac{2\dot{\gamma}^2}{(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)} \right] \right\}; \end{aligned}$$

- Direção y :

$$\begin{aligned}
 0 = & -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\mu_B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \mu\phi \left\{ \frac{1580}{133} \frac{\sigma}{\lambda^2 \mu a} \frac{\dot{\gamma} \dot{\gamma}_y}{(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)} \left[1 - \frac{\dot{\gamma}^2}{(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)} \right] \right\} \\
 & + \mu\phi \left\{ \frac{100}{19} \frac{\sigma^2}{\lambda^3 \mu^2 a^2} \frac{\dot{\gamma}_x}{(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)} \left[1 - \frac{2\dot{\gamma}^2}{(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)} \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Em que, $\dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial y}$, $\dot{\gamma}_x = \frac{\partial}{\partial x} (\dot{\gamma}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\dot{\gamma}_y = \frac{\partial}{\partial y} (\dot{\gamma}) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $c_1 = \frac{20}{19} \frac{\sigma}{\lambda \mu a}$ e $\mu_B = \left[1 + \phi \left(\frac{5}{2} - \frac{25}{4\lambda} \right) \right]$.

O termo μ_B corresponde a viscosidade efetiva de uma emulsão de gotas para elevados números de capilaridade (Oliveira, 2007). No entanto, é preciso lembrar que estamos em um contexto de altas razões de viscosidade o que condiz com as hipóteses da teoria de pequenas deformações.

4 Modelo numérico

A maioria dos problemas físicos podem ser modelados a partir de equações diferenciais. Para a solução destas equações normalmente recorre-se a métodos numéricos que discretizam o domínio em equações algébricas que definem o problema em cada ponto ou nó. O método de diferenças finitas é um método clássico para a resolução numérica de uma equação diferencial, simples de implementar, no entanto, serve satisfatoriamente apenas para geometrias regulares. Com isso, para a abordagem de problemas de engenharia com domínios complexos e irregulares, uma classe de métodos variacionais foram desenvolvidos ao longo dos séculos XIX e XX por pesquisadores renomados como Rayleigh, Ritz e Galerkin. Dentre estes métodos, o método de elementos finitos surge como uma ramificação importante.

O método de elementos finitos baseia-se em uma formulação de resíduos ponderados de Galerkin. Esta formulação se mostrou bem sucedida para problemas aplicados em mecânica dos sólidos e para problemas em transferência de calor, principalmente no início dos anos 70. Tal sucesso impulsionou a utilização deste método para a simulação de problemas em dinâmica dos fluidos. Problemas, até então, de difícil modelagem como os de mecânica estrutural e os difusivos-convectivos, dominados pelo termo de transporte convectivo, passaram a ser novamente estudados a fundo. Contudo, a principal dificuldade de lidar com fenômenos dominados pelo transporte convectivo é a instabilidade do método nestes casos, como ocorre em um problema típico de camada limite. Esta instabilidade se verifica pois, o próprio Método de Galerkin, introduz uma difusidade numérica negativa para situações de elevado número de Reynolds ou Peclet. Esta difusidade negativa é inerente ao método e ocorre devido a presença de um operador não simétrico associado ao termo convectivo. Uma forma de contornar tal revés, sem depender exclusivamente de um refinamento de severo de malha, é a utilização de técnicas de estabilização como o método Streamline-Upwind Petrov-Galerkin (*SUPG*) e o método Galerkin/Least-squares (*GLS*) Donea & Huerta (2003).

O modelo numérico deste trabalho engloba a solução das equações de Navier Stokes para um fluido incompressível e em regime permanente. A metodologia usada está de acordo com a abordagem apresentada por Carvalho & Valério (2012). Além disso, com o intuito de estabilizar a convergência do modelo, incorporou-se a esta formulação o método de estabilização conhecido como Streamline-Upwinding (*SU*) que nada mais é do que uma modificação das funções peso de modo a concentrá-las mais a montante de cada elemento e na direção da linha de corrente.

O método dos elementos finitos envolve alguns ingredientes principais que definem a sua estrutura. De uma forma geral, para a construção deste método deve-se escrever a forma forte da equação diferencial em sua forma integral fraca equivalente; escrever a solução exata em uma

forma aproximada usando o método de Ritz; aplicar as funções peso de Galerkin e, finalmente, usar funções de base Lagrangeanas na formulação integral fraca montada no início do estudo. Após realizar, estes passos, um sistema de equações algébricas é obtido e pode ser resolvido para cada ponto de interesse da malha. A beleza deste método consiste na correspondência entre a visão elementar e global do sistema. Todos estes ingredientes serão abordados neste capítulo com o intuito de familiarizar o leitor com a formulação numérica do problema estudado neste trabalho.

4.1 Métodos Variacionais

No estudo de uma equação diferencial usando métodos variacionais, o objetivo é buscar uma solução aproximada, $u_h(x)$, da solução exata do problema diferencial, $u(x)$, em um subespaço de funções de dimensão finita. Esta solução aproximada é uma projeção da solução exata neste subespaço de funções e pode ser representada como uma combinação linear de funções linearmente independentes, ϕ_i , que formam a base deste subespaço, tal que

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i; \quad (4.1)$$

em que os coeficientes c_i são obtidos de forma que a equação diferencial seja satisfeita. Esta forma de expansão da solução aproximada é conhecida como o método de Ritz. Vale ressaltar que estas funções de base são conhecidas e devem satisfazer as condições de contorno do problema. A dimensão deste subespaço de funções é definida pelo número de funções que formam a base deste conjunto. Com isso, quanto maior o número de funções de base usadas para a expansão da solução aproximada, maior será a sua precisão.

A vantagem do uso desta forma de solução é que as funções de base podem ser escolhidas de acordo com o tipo do método variacional. Por exemplo, em elementos finitos, as funções de base utilizadas são diferentes de zero em apenas algumas partes do domínio, e com isso, o sistema de equações algébricas resultante possui uma matriz de coeficientes esparsa. Este formato das funções de base é conhecido na literatura como funções de base Lagrangeanas. Uma definição mais formal será feita no decorrer deste capítulo. O comportamento destas funções justifica o custo computacional para a solução de problemas de grande porte como os de dinâmica dos fluidos.

Para a obtenção da solução aproximada $u_h(x)$ deve-se substituir a equação (4.1) na equação diferencial que define o problema. Então, reescreve-se o problema em sua forma fraca (ou integral), utilizando o método dos resíduos ponderados. Isso porque a simples substituição de $u_h(x)$ na equação modelo não significa a obtenção de um sistema com N equações linearmente independentes para os coeficientes c_i .

4.2 Formulação Integral

A apresentação de uma equação diferencial com as suas condições de contorno define um espaço de solução exata, U , em que a equação governante é imposta em todos os pontos do domínio. Esta forma de escrever o problema é, então, classificada como forte (S). A forma fraca (W) do problema surge do método dos resíduos ponderados, que trabalha justamente com esta aproximação da solução exata, proveniente da formulação forte. Neste método, a partir do momento em que a solução forte é projetada no subespaço de dimensão finita, U_h , um resíduo, R , oriundo desta aproximação surge e é computado. Note que se a solução aproximada $u_h(x)$ for igual a solução exata do problema $u(x)$, então o resíduo desta aproximação é zero e os espaços U e U_h são os mesmos.

No método dos resíduos ponderados o objetivo é garantir que, pelo menos na média, $u_h = u$, ou seja,

$$\int_0^1 w R dx = 0,$$

em que w é o peso desta ponderação. Observe que ao integrar o resíduo R com o peso w , o intuito é fazer com que a média ponderada seja zero e, assim, na média $u_h = u$, enfraquecendo a solução do problema. As funções peso w devem pertencer a um espaço finito $V_h \subset V$ que seja definido por funções peso ψ_i que formam a base deste subespaço. Antes de prosseguirmos com o estudo da formulação fraca é preciso definir formalmente os espaços de funções V_h e U_h .

Seja Ω um domínio aberto do espaço \mathbb{R}^n com fronteira suave, Γ . O primeiro espaço de funções V_h é composto por funções peso ou teste, w , em que

$$V_h = \{w \in \mathcal{H}^1(\Omega) | w = 0 \rightarrow \Gamma_D\}, \quad (4.2)$$

onde Γ_D é a fronteira na qual é imposta a condição de contorno de Dirichlet e \mathcal{H}^1 é um espaço de Hilbert definido por

$$\int_{\Omega} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx < \infty \Rightarrow w \in \mathcal{H}^1. \quad (4.3)$$

No subespaço V_h , os elementos possuem primeira derivada elevada ao quadrado integrável ao longo do domínio Ω e são iguais a zero na fronteira de Dirichlet. Em outras palavras, como a solução já é conhecida em Γ_D , o peso da aproximação deve ser igual a zero, ou seja, $w = 0$.

O segundo conjunto de funções U_h , composto por funções de base $u = u_h$, é similar ao subespaço de funções V_h . A principal diferença entre eles é que o subespaço U_h é composto por funções que devem satisfazer as condições de contorno de Dirichlet em Γ_D . Este conjunto de funções é dado por

$$U_h = \{u \in \mathcal{H}^1(\Omega) | u = u_D \rightarrow \Gamma_D\}. \quad (4.4)$$

Com isso, cada equação do resíduo para cada uma das N aproximações contém uma função peso associada, de modo que podemos escrever

$$R_i = \int_0^1 w R dx, \quad (4.5)$$

em que queremos $R_i = 0$ em cada ponto ou coordenada x do domínio. Perceba que a função peso w pode ser expressa também como uma combinação linear tal que

$$w(x) = \sum_{i=1}^N w_i \psi_i. \quad (4.6)$$

Sendo U_h um espaço de dimensão N , devido à combinação linear expressa em (4.1), são necessárias N equações linearmente independentes para a determinação dos coeficientes c_i . Pelo método dos resíduos ponderados, estas equações surgem da equação (4.5). Note que, nesta equação, a solução aproximada $u_h(x)$ está embutida no resíduo R e, portanto, são necessárias $i = N$ funções de peso, ψ_i , para que a ponderação seja realizada com sucesso. Estas N equações linearmente independentes formam um sistema representado por

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b}, \quad (4.7)$$

em que \mathbf{A} é a matriz global ou de rigidez, \mathbf{c} é o vetor contendo os valores dos coeficientes c_i da combinação linear (4.1) e \mathbf{b} é o vetor que computa as condições de contorno do problema. Neste caso, o vetor \mathbf{c} incorpora os valores, aproximados, da equação equação diferencial em cada um dos pontos da discretização do domínio.

O método dos elementos finitos consiste em escolher apropriadamente as funções de base ϕ_i e ψ_i , de modo que estas funções sejam diferentes de zero em uma pequena parte do domínio, definindo um elemento. As funções que atendem a estes requisitos são chamadas de funções Lagrangeanas, como mencionado no início deste capítulo. Seja $\phi_i(x_j)$ uma função Lagrangeana definida ao longo de um domínio linear $x|x \in \mathbb{R}$, então temos que

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (4.8)$$

em que δ_{ij} é o operador delta de Kronecker.

Com isso, o comportamento do problema físico descrito pela matriz global pode ser representado por pequenas contribuições características de cada partição (elemento) do domínio. E, desta maneira, um processo iterativo pode ser realizado para resolver o sistema de equações algébricas (4.7), elemento a elemento, de tal forma que a solução aproximada u_h possa ser obtida por contribuições locais (ou elementares).

O método de resíduos ponderados utilizado neste trabalho foi o método de Galerkin que, de fato, define a estrutura típica de uma formulação em elementos finitos. Neste método, a solução aproximada é uma projeção ortogonal da solução exata no subespaço de dimensão finita, U_h . Além disso, o subespaço de funções peso, V_h , é igual ao subespaço de funções de

base, de modo que $\phi_i = \psi_i$. E desta forma, a matriz de rigidez \mathbf{A} é simétrica. No entanto, para problemas difusivos-convectivos, essa simetria é quebrada pela presença de um termo convectivo assimétrico na composição da matriz global. O outro termo associado aos efeitos difusivos é simétrico. Outros métodos também utilizados são: o método de Petrov-Galerkin, dos Mínimos Quadrados e o método da Colocação (Carvalho & Valério, 2012).

4.3 Formulação numérica para a Camada Limite

O foco principal deste trabalho é estudo da camada limite hidrodinâmica de emulsões diluídas. Para tanto, é necessário definir primeiramente a aplicação do método de elementos finitos para as equações governantes que regem o movimento de um fluido incompressível e viscoso qualquer, que são as equações de Navier-Stokes. Feito isso, é possível extrair perfis de velocidade do campo de solução obtido e realizar as devidas comparações. Validado o método em elementos finitos para um fluido Newtoniano qualquer como, por exemplo, a água, parte-se para uma nova etapa do estudo. Nesta nova etapa a emulsão se torna o centro das atenções. Agora, a incorporação do tensor de tensões adicional oriundo da fase dispersa deve ser feita ao tensor de tensões da fase contínua. Com isso, o modelo numérico anterior é adaptado de modo a computar tais acréscimos de tensão. Portanto, para o entendimento do modelo final direcionado às propriedades físicas da camada limite de uma emulsão, é necessário estudar a construção em elementos finitos das equações de Navier-Stokes. As próximas seções deste capítulo estão organizadas com a finalidade de atender este estudo.

4.3.1 Formulação Integral das Equações de Navier-Stokes

A equação do movimento e a equação da continuidade para fluidos incompressíveis em regime permanente são dadas por

$$\begin{cases} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{T} \text{ e} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

em que \mathbf{T} é igual ao tensor de tensões para um fluido Newtoniano $\boldsymbol{\sigma}^N$. Neste caso, as forças de campo não interferem na dinâmica do escoamento do fluido e a equação do movimento é expressa em termos da pressão modificada. Para um fluido Newtoniano, o tensor de tensões varia linearmente com a taxa de deformação e pode ser escrito como:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu [\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T].$$

É importante lembrar que a equação do movimento é não linear no termo convectivo $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ e de segunda ordem no termo $\nabla \cdot \nabla \mathbf{u}$. As variáveis do problema são o campo de velocidade, \mathbf{u} , e o campo de pressão, p . Como esta equação é de segunda ordem, as condições de contorno

devem ser especificadas em todas as fronteiras do domínio. Em geral, as condições de contorno podem ser de velocidade ou força agindo no contorno e dependem da física do problema.

4.3.1.1 Formulação Fraca - Método dos Resíduos Ponderados

A utilização do método dos resíduos ponderados para resolver o sistema de equações diferenciais parciais, geradas pela projeção da solução exata em um subespaço finito, requer que os resíduos da aproximação de cada equação em (4.9) sejam multiplicados por uma função peso. Além disso, a integral deste produto deve ser zero ao longo de todo o domínio em estudo. Como a equação do movimento é uma equação vetorial, a função peso a ela associada também é uma função vetorial definida por \mathbf{w} . Por outro lado, a equação da continuidade, por ser escalar, requer uma função peso também escalar w . Assim, as formulações fracas das equações de Navier-Stokes e da continuidade, respectivamente, são dada por

$$R_m = \int_{\Omega} [\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{T}] \cdot \mathbf{w} d\Omega = 0 \quad e \quad (4.10)$$

$$R_c = \int_{\Omega} [\nabla \cdot \mathbf{u}] w d\Omega = 0, \quad (4.11)$$

em que Ω é o domínio de fluido de fronteira Γ . Estudaremos nas próximas duas subseções cada uma destas equações de resíduo efetuando a discretização imposta aos campos de velocidade e pressão.

4.3.1.2 Resíduo Ponderado da Equação do Movimento

A equação (4.10) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$R_m = \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{w} d\Omega,$$

onde o termo $\nabla \cdot \mathbf{T}$ possui derivadas segundas de velocidade, que é uma das incógnitas do problema. Integra-se por partes para transferir a derivada segunda da velocidade para a função vetorial peso usando a seguinte identidade tensorial:

$$\mathbf{T} : \nabla \mathbf{w} = \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{w}) - (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{w}. \quad (4.12)$$

Com isso, obtém-se

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{w} d\Omega = - \int_{\Omega} \mathbf{T} : \nabla \mathbf{w} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{w}) d\Omega,$$

e, pelo Teorema de Gauss aplicado ao último termo do lado direito da equação, tem-se que

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{w}) d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{w}) d\Gamma,$$

onde \mathbf{n} é o vetor normal unitário ao contorno Γ .

Portanto, o resíduo ponderado da equação do movimento pode ser expresso sem os termos de derivada segunda das funções de base ou das funções peso. Assim,

$$R_m = \int_{\Omega} \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{T} : \nabla \mathbf{w} d\Omega - \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{w} d\Gamma, \quad (4.13)$$

onde a última integral computa os efeitos das condições de contorno. No sistema de coordenadas cartesianas, sejam:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

e

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Ainda na forma matricial, o tensor de tensões \mathbf{T} é dado por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{xx} & \mathbf{T}_{xy} \\ \mathbf{T}_{yx} & \mathbf{T}_{yy} \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

A função vetorial peso \mathbf{w} pode ser escrita em termos de suas componentes de modo que $\mathbf{w} = [w_1, w_2]$. Com isso, cada componente de (4.13) pode ser escrita da seguinte forma

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} = w_1 \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + w_2 \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \nabla \mathbf{w} &= \frac{\partial w_1}{\partial x} \left[-p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial w_1}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial w_2}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial w_2}{\partial y} \left[-p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right], \end{aligned}$$

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{w} = f_x w_1 + f_y w_2,$$

em que f_x e f_y são as componentes da força superficial por unidade de área, \mathbf{f} , atuante sobre o contorno Γ e $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{f}$ é uma condição de contorno natural.

Além disso, cada componente da função peso vetorial pode ser representada como uma combinação linear de funções base escalares ψ_i , de modo que

$$w_1 = \left\langle \begin{bmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \psi_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \psi_n \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

e

$$w_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_2 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_n \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Se cada componente w_1 e w_2 possui dimensão n , então a função peso vetorial \mathbf{w} faz parte de um espaço de dimensão $2n$. Dessa forma, as componentes da equação de conservação da quantidade de movimento podem ser desacopladas devido ao fato de que as primeiras n funções de base, ψ_i , estão associadas a primeira componente de velocidade u e as outras n estão ligadas a segunda componente de velocidade v . Portanto, as $2n$ equações algébricas relacionadas à equação de conservação da quantidade de movimento são dadas por:

$$\begin{aligned} R_{mx}^i &= \int_{\Omega} \rho \psi_i \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left(-p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] d\Omega - \int_{\Gamma} \psi_i f_x d\Gamma; \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} R_{my}^i &= \int_{\Omega} \rho \psi_i \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left(-p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} \psi_i f_y d\Gamma; \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.16)$$

4.3.1.3 Resíduo Ponderado da Equação da Conservação da Massa

A equação do resíduo para a equação da continuidade dada em (4.11) não apresenta nenhum termo de derivada segunda dos campos de pressão ou de velocidade; assim, as manipulações efetuadas anteriormente para a equação do movimento não são necessárias. Além disso, a função escalar peso w está no espaço gerado pelas funções de base $\{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m\}$. Assim, as m equações algébricas para a equação do resíduo da equação da continuidade podem ser reescritas como:

$$R_c^i = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \chi_i d\Omega; \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.17)$$

4.3.2 Expansão dos Campos de Velocidade e Pressão

Os campos de pressão e velocidade devem ser escritos em termos das funções de base de cada um dos espaços em que estão contidos. As funções de base associadas aos campos de velocidade e pressão são dadas por ϕ_i e χ_i , respectivamente. Os n resíduos associados a cada componente da equação da quantidade de movimento possuem termos de pressão e de derivadas de velocidade. Com isso, para que estes termos possuam a mesma precisão de discretização, as funções de base utilizadas para a pressão e para o campo de velocidade não precisam ser da

mesma ordem. Quando dois campos de variáveis não pertencem ao mesmo espaço, a formulação é classificada como Mista (*Mixed Finite Element*).

Resumindo, os campos desconhecidos do problema podem ser escritos como uma combinação linear de funções de base da seguinte forma

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n U_i \phi_i \\ \sum_{i=1}^n V_i \phi_i \end{bmatrix}$$

e

$$p = \sum_{i=1}^m P_i \chi_i,$$

em que o campo de velocidade, \mathbf{u} , possui $2n$ incógnitas e o campo de pressão, p , possui m incógnitas. Note que a função de base usada na expansão do campo de pressão é a mesma função peso escalar utilizada na equação do resíduo ponderado da equação de conservação da massa. Assim, o número de incógnitas do problema é igual ao número de equações, isto é, $2n + m$. No entanto, do ponto de vista numérico, não é qualquer escolha de funções de base, ϕ_i e χ_i , que irá satisfazer as formulações fracas. Com isso, a combinação correta de funções de base leva a métodos estáveis. A Tabela 1 mostra diferentes combinações das funções de base que levam a esta estabilidade. Estas combinações obedecem a condição de Babuska-Brezzi.

Elementos	ϕ_i	ψ_i
Elementos Retangulares	<ul style="list-style-type: none"> ▷ bilinear ($n = 4$) ▷ biquadrático ($n = 9$) ▷ biquadrático ($n = 9$) ▷ bicúbico ($n = 16$) 	<ul style="list-style-type: none"> ▷ constante ($m = 1$) ▷ bilinear ($m = 4$) ▷ linear descontínuo ($m = 3$) ▷ biquadrático ($m = 9$)
Elementos Triangulares	<ul style="list-style-type: none"> ▷ quadrático ($n = 6$) ▷ cúbico ($n = 9$) 	<ul style="list-style-type: none"> ▷ linear ($m = 6$) ▷ quadrático ($m = 6$)

Tabela 1 – Tabela a lista de diferentes combinações de funções de base ϕ_i e ψ_i .

Neste trabalho o programa desenvolvido utiliza elementos retangulares, biquadráticos para as duas componentes de velocidade e lineares descontínuos para a pressão.

4.3.3 Construção do Elemento

A filosofia dos elementos finitos se concentra no elemento. A construção da matriz global ou de rigidez de um problema físico é feita pela colagem de matrizes de rigidez elementares. Esta colagem de matrizes elementares é realizada de acordo com uma outra matriz que relaciona os nós locais com os nós globais da malha em estudo. Esta matriz de conexão é conhecida como matriz de conectividade. Geradores de malhas comerciais, geralmente, fornecem estas matrizes de acordo com as características do elemento escolhido para a discretização do domínio.

Sabe-se que, neste trabalho, o elemento escolhido foi o quadrangular biquadrático para velocidade e linear descontínuo para a pressão. Este elemento possui nove nós que refletem 21 graus de liberdade. Dentre estes graus de liberdade, nove estão associados a cada componente da velocidade e três estão ligados à pressão. A Figura 3 mostra a ordem de numeração dos nós do elemento considerado e a Figura 4 mostra a posição de cada um dos 21 graus de liberdade. Note bem que os graus de liberdade para a pressão estão posicionados no centro do elemento.

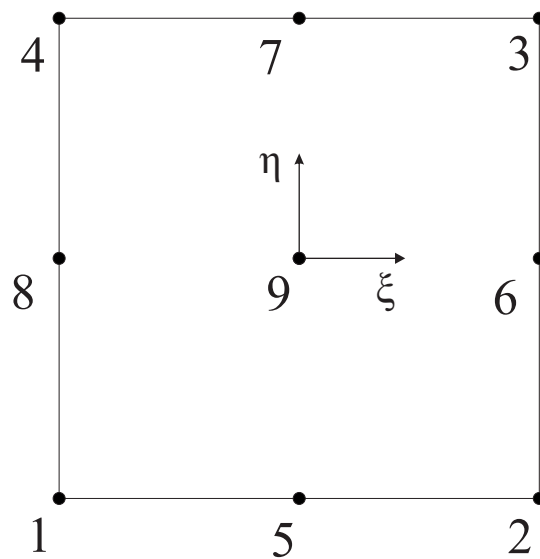


Figura 3 – Numeração dos nós do elemento biquadrático. Neste elemento as variáveis ξ e η são as coordenadas locais do elemento.

Desta forma, em cada elemento deste tipo os campos de velocidade e pressão são escritos da seguinte maneira:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^9 U_i \phi_i \\ \sum_{i=1}^9 V_i \phi_i \end{bmatrix} e$$

$$p = \sum_{i=1}^3 P_i \chi_i.$$

Vale lembrar que as funções de base elementares, ϕ_i , usadas para combinar linearmente as componentes de velocidade u e v são Lagrangeanas, pois queremos que cada nó possua um

valor apenas de velocidade U e V . Isto é, queremos uma função que seja unitária em um determinado nó e zero em todos os outros nós do elemento.

Com base na definição de função Lagrangeana e nas coordenadas locais (ξ, η) , as funções de base escolhidas para a expansão do campo de velocidade foram:

$$\begin{aligned}\phi_1(-1, -1) &= \frac{\xi(\xi - 1)\eta(\eta - 1)}{4}; & \phi_2(1, -1) &= \frac{\xi(\xi + 1)\eta(\eta - 1)}{4}; & \phi_3(1, 1) &= \frac{\xi(\xi + 1)\eta(\eta + 1)}{4}; \\ \phi_4(-1, 1) &= \frac{\xi(\xi - 1)\eta(\eta + 1)}{4}; & \phi_5(0, -1) &= \frac{(1 - \xi^2)\eta(\eta - 1)}{2}; & \phi_6(1, 0) &= \frac{\xi(\xi + 1)(1 - \eta^2)}{2}; \\ \phi_7(0, 1) &= \frac{(1 - \xi^2)\eta(\eta + 1)}{2}; & \phi_8(-1, 0) &= \frac{\xi(\xi - 1)(1 - \eta^2)}{2}; & \phi_9(0, 0) &= (1 - \xi^2)(1 - \eta^2).\end{aligned}$$

Por outro lado, as funções de base adotadas para expandir o campo de pressão não são Lagrangeanas. Neste elemento, estas funções são escolhidas de modo que o primeiro grau de liberdade de pressão (P_1) represente o valor da pressão no centro do elemento, o segundo grau de liberdade (P_2), a taxa de variação da pressão ao longo da direção η , e o terceiro grau de liberdade (P_3), a taxa de variação da pressão ao longo da direção ξ . Desta forma, o campo de pressão para cada elemento pode ser escrito da seguinte forma

$$p(\xi, \eta) = P_1 + \eta P_2 + \xi P_3.$$

Note que p é uma combinação linear de funções de base $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}$, onde $\chi_1(\xi, \eta) = 1$, $\chi_2(\xi, \eta) = \eta$ e $\chi_3(\xi, \eta) = \xi$. Além disso, $p(0, 0) = P_1$, $\partial p / \partial \eta = P_2$ e $\partial p / \partial \xi = P_3$.

Para cada elemento, o número de graus de liberdade é maior do que o número de nós, pois estamos tratando de um conjunto de equações diferenciais parciais para os campos de velocidade e pressão. E, neste caso, a montagem da matriz global não pode ser feita por uma simples correspondência entre as numerações dos nós globais e locais dos elementos, como no caso dos problemas lineares. Deve-se fazer uma correlação entre a numeração global e local dos graus de liberdade do problema e esta informação deve ser armazenada em uma matriz. A forma como esta numeração é realizada é aleatória; neste trabalho obedeceu-se ao ordenamento dado pela Tabela 2 e pela Figura 4.

Assim sendo, substituindo-se as expansões lineares para os campos de velocidade e pressão nas equações para os resíduos ponderados das equações de Navier-Stokes, obtém-se um sistema com $2n + m = 21$ equações algébricas não lineares. Para a solução deste sistema não linear utilizou-se, neste trabalho, o Método de Newton-Raphson.

Antes de aprofundar o estudo relacionado às características da solução deste sistema, será apresentado o mapeamento adotado neste trabalho para relacionar os sistema de coordenadas elementares e globais. O mapeamento utilizado foi o isoparamétrico.

Grau de liberdade local	Grau de Liberdade
1	U_1
2	U_2
\vdots	\vdots
8	U_8
9	U_9
10	V_1
11	V_2
\vdots	\vdots
17	V_8
18	V_9
19	P_1
20	P_2
21	P_3

Tabela 2 – Numeração dos graus de liberdade de velocidade e pressão do elemento biquadrático

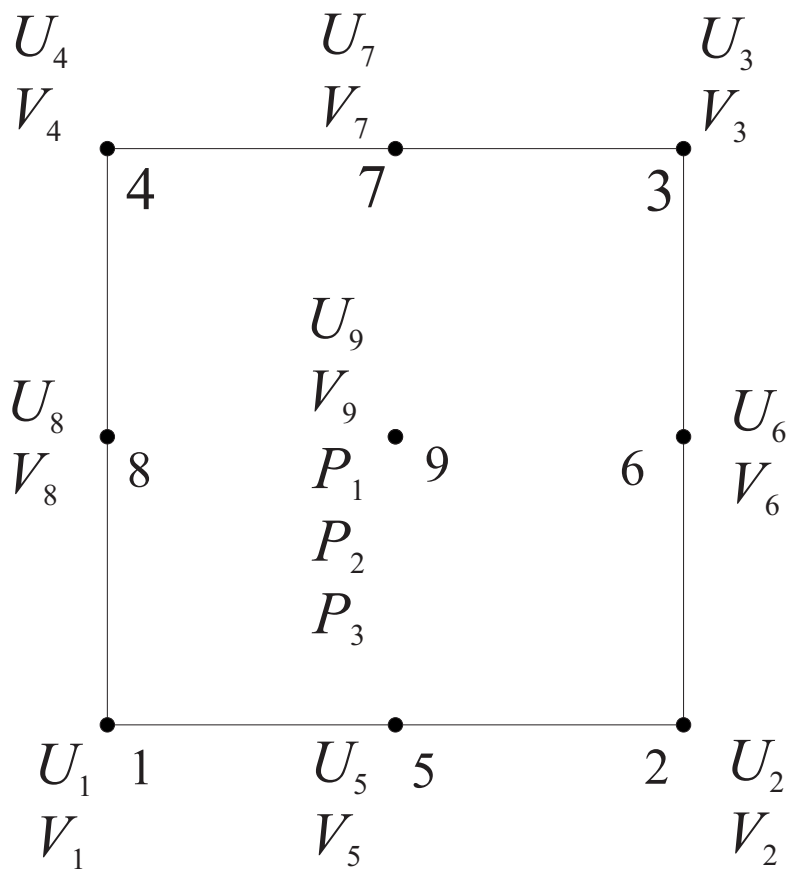


Figura 4 – Correspondência entre os graus de liberdade de velocidade e pressão do elemento biquadrático e seus respectivos nós.

4.3.4 Mapeamento Isoparamétrico

O mapeamento isoparamétrico estabelece uma relação entre as coordenadas locais e globais de cada elemento. Dois requisitos devem ser atendidos para a realização deste mapeamento, a saber,

- linhas de contorno do elemento são mapeadas em linhas de contorno;
- nós globais são mapeados em nós locais.

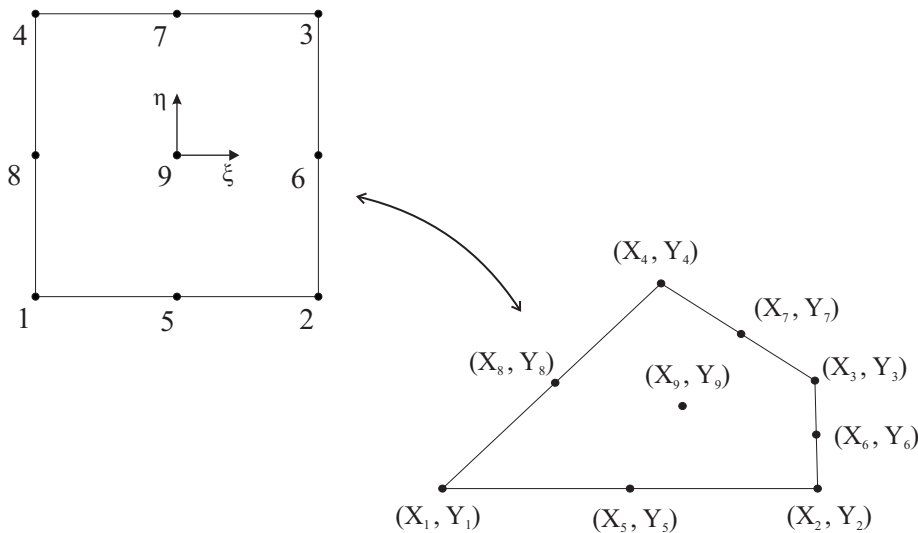


Figura 5 – Descrição gráfica do mapeamento isoparamétrico de um elemento biquadrático.

Com base nestas informações, um mapeamento geralmente adotado é dado por

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^9 X_i \phi_i(\xi, \eta), \\ y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^9 Y_i \phi_i(\xi, \eta). \end{cases}$$

Desta relação, é possível perceber que, por exemplo,

$$x_1(-1, -1) = X_1 \phi_1(-1, -1) + X_2 \phi_2(1, -1) + X_3 \phi_3(1, 1) + \dots + X_9 \phi_9(0, 0) = X_1;$$

a mesma lógica aplica-se para todos os outros nós.

Sabendo-se da forma do mapeamento entre as coordenadas, as derivadas das funções de base $\partial \phi_i / \partial x$ e $\partial \phi_i / \partial y$, com $i = 1, \dots, 9$, podem ser determinadas como segue

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

E, na forma matricial, este sistema de duas equações pode ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \end{bmatrix},$$

onde a matriz Jacobiano da transformação de coordenadas é dada por

$$\mathbf{JAC} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}.$$

Portanto, as derivadas das funções de base ϕ_i em coordenadas globais são obtidas por

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{JAC}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \end{bmatrix},$$

em que \mathbf{JAC}^{-1} é a inversa da matriz de transformação de coordenadas, dada por

$$\mathbf{JAC}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{JAC}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix},$$

em que, $|\mathbf{JAC}| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta}$.

Lembre que as funções de base ϕ_i são conhecidas e dependem das características do elemento escolhido para a discretização do domínio. As derivadas das funções de base serão de suma importância para o cálculo das integrais das componentes das matrizes de rigidez elementares. Estas integrais podem ser calculadas analiticamente ou numericamente. Neste trabalho o método de integração numérica de Quadratura Gaussiana foi escolhido.

4.3.5 Integração numérica

O mapeamento isoparamétrico é utilizado para converter coordenadas globais (x, y) em locais (ξ, η) , de modo que as integrais ao longo de cada elemento são escritas da seguinte forma

$$\int_{\Omega} F(x, y) dx dy = \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{F}(\xi, \eta) |\mathbf{JAC}| d\xi d\eta,$$

em que \mathbf{JAC} é o Jacobiano da transformação das coordenadas.

Essas integrais podem ser calculadas utilizando o método de integração de Quadratura Gaussiana, em que,

$$\int_{\Omega} \tilde{F}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{F}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{igp} \sum_{jgp} \tilde{F}(\xi_{igp}, \eta_{jgp}) W_{igp} W_{jgp},$$

onde (ξ_{igp}, η_{jgp}) fornece a coordenada dos pontos de Gauss dentro de cada elemento; e W_{igp} e W_{jgp} são os pesos associados a cada ponto ξ_{igp} e η_{jgp} , respectivamente. O programa usado neste trabalho calcula estas integrais podendo variar o número de pontos de Gauss de um a oito.

Agora, tendo em vista a solução do sistema de equações algébricas não lineares obtido pela formulação em elementos finitos, a próxima seção irá tratar do Método de Newton-Raphson. Este método, como foi mencionado anteriormente, foi o escolhido para a obtenção da solução deste sistema de equações.

4.3.6 Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson é um dos métodos mais utilizados para localizar a raiz de uma equação algébrica. Se a aproximação inicial da raiz for x_i , uma estimativa melhorada desta raiz é obtida prolongando-se a reta tangente a partir do ponto $[x_i, f(x_i)]$. A nova raiz corresponde ao ponto x_{i+1} do gráfico da Figura 6.

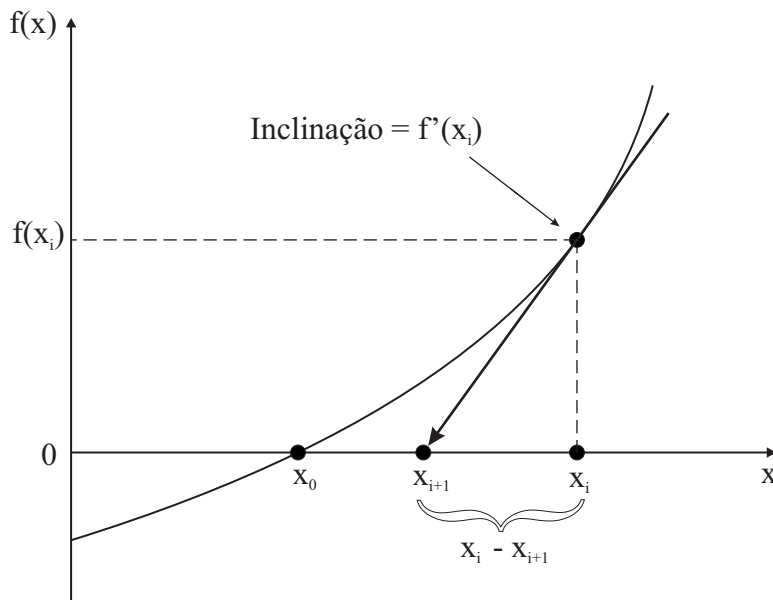


Figura 6 – Descrição gráfica do método de Newton-Raphson. A tangente à função em x_i é prolongada até o eixo x para fornecer uma estimativa em x_{i+1} .

O objetivo principal do método é obter um Δx tal que $f(x_i + \Delta x) = 0$, onde $\Delta x = x_i - x_{i+1}$. Neste ponto ideal, a nova raiz melhorada x_{i+1} deve ser igual a x_0 ou, pelo menos, aproximadamente igual de acordo com uma tolerância imposta para a convergência do método. Da expansão em série de Taylor temos que

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \Delta x \cdot f'(x_i) + \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

Seja o seguinte sistema de equações algébricas:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

Aplicando a série de Taylor para cada equação de (4.18) temos a seguinte configuração

$$f_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n$$

que se repetirá para todas as outras equações algébricas deste sistema.

Na forma matricial tem-se

$$f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{Bmatrix}$$

em que \mathbf{J} é a matriz Jacobiana. Reescrevendo a expansão em série de Taylor na forma vetorial obtém-se a seguinte equação

$$f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{x} + \mathcal{O}(\Delta \mathbf{x}^2).$$

Pelo método de Newton-Raphson queremos encontrar um valor de $\Delta \mathbf{x}$ que somado a \mathbf{x} nos leve à solução (raiz) onde $f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = 0$.

Agora, voltando para a formulação em elementos finitos abordada neste capítulo, o sistema de equações algébricas não lineares obtido pode ser representado por

$$\mathbf{R}(\mathbf{c}) = 0,$$

em que $\mathbf{c} = (U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n, P_1, \dots, P_m)^T$ e \mathbf{R} é um vetor contendo os $2n + m$ resíduos ponderados para cada elemento. O método de Newton-Raphson consiste na solução deste sistema a partir do seguinte método iterativo


```

c = c0
while ||R(c)|| > ε do
  JΔc = -R
  c = c + Δc
end while

```

em que ϵ é uma tolerância adotada para a convergência da solução numérica, \mathbf{c}_0 é o chute inicial e \mathbf{J} é a matriz Jacobiana, que denota a sensibilidade de cada equação de resíduo ponderado em relação a cada incógnita do problema contida no vetor \mathbf{c} . Assim, cada posição desta matriz é calculada como

$$J_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial c_j}.$$

Com base nestes conceitos, a matriz Jacobiana elemental \mathbf{J}^e assume o seguinte formato:

$$\mathbf{J}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{mx}^i}{\partial U_j} & \frac{\partial R_{mx}^i}{\partial V_j} & \frac{\partial R_{mx}^i}{\partial P_j} \\ \frac{\partial R_{my}^i}{\partial U_j} & \frac{\partial R_{my}^i}{\partial V_j} & \frac{\partial R_{my}^i}{\partial P_j} \\ \frac{\partial R_c^i}{\partial U_j} & \frac{\partial R_c^i}{\partial V_j} & \frac{\partial R_c^i}{\partial P_j} \end{bmatrix},$$

em que as nove primeiras linhas correspondem aos nove resíduos ponderados da componente x da equação da quantidade de movimento, as nove seguintes, aos nove resíduos da componente y , e as três restantes, aos três resíduos da equação da continuidade. Utilizando o mesmo raciocínio, as nove primeiras colunas de $\mathbf{J}^{(e)}$ são referentes aos coeficientes U_j da expansão linear do campo de velocidade \mathbf{u} na direção \mathbf{x} , as nove seguintes, aos coeficientes V_j desta mesma expansão na direção \mathbf{y} , e as três colunas restantes, aos coeficientes P_j , da combinação linear para o campo de pressão.

As expressões para os elementos de cada linha desta matriz são dados por:

- Jacobiano de R_{mx}^i :

$$\frac{\partial R_{mx}^i}{\partial U_j} = \int_{\Omega_e} \left\{ \rho \phi_i \left[\phi_j \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + v \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right] + 2\mu \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right\} d\Omega_e;$$

$$\frac{\partial R_{mx}^i}{\partial V_j} = \int_{\Omega_e} \left\{ \rho \psi_i \phi_j \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right\} d\Omega_e;$$

$$\frac{\partial R_{mx}^i}{\partial P_j} = \int_{\Omega_e} -\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \chi_j d\Omega_e.$$

- Jacobiano de R_{my}^i :

$$\frac{\partial R_{my}^i}{\partial U_j} = \int_{\Omega_e} \left\{ \rho \psi_i \phi_j \frac{\partial v}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right\} d\Omega_e;$$

$$\frac{\partial R_{my}^i}{\partial V_j} = \int_{\Omega_e} \left\{ \rho \psi_i \left[u \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \phi_j \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right] + \mu \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right\} d\Omega_e;$$

$$\frac{\partial R_{my}^i}{\partial P_j} = \int_{\Omega_e} -\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \chi_i d\Omega_e.$$

- Jacobiano da Continuidade:

$$\frac{\partial R_c^i}{\partial U_j} = \int_{\Omega_e} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \chi_i d\Omega_e;$$

$$\frac{\partial R_c^i}{\partial V_j} = \int_{\Omega_e} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \chi_i d\Omega_e;$$

$$\frac{\partial R_c^i}{\partial P_j} = 0.$$

Algumas observações importantes deste método são:

- a cada passo do método de Newton-Raphson, o sistema $\mathbf{J}\Delta\mathbf{c} = -\mathbf{R}$ deve ser resolvido;
- se o problema for linear, o método converge em uma iteração;
- a visão elementar do problema fica inalterada. No lugar de calcular a matriz e o vetor elementar, \mathbf{A}^e e \mathbf{b}^e , deve-se calcular a matriz Jacobiana elementar, \mathbf{J}^e , e o vetor resíduo elementar \mathbf{R}^e .

4.3.7 Problema Convectivo Difusivo

Esta seção trata das deficiências da formulação padrão em elementos finitos para problemas convectivos difusivos dominados por efeitos convectivos como é, por exemplo, o caso da camada limite. Estas deficiências estão diretamente ligadas a presença de uma difusividade numérica negativa inerente ao próprio método de Galerkin que gera instabilidades na solução da equação governante característica destes problemas.

Um problema difusivo convectivo é descrito por uma equação que retrata o transporte de uma grandeza escalar ou vetorial, que poderia ser a temperatura, por exemplo. O modelo

é representado por uma equação diferencial que em sua forma adimensional traz o número de Peclet que caracteriza um balanço entre os efeitos convectivos e difusivos e é dado por $Pe = \frac{LU}{\alpha}$. Nesta relação, L e U são o comprimento e velocidade característicos e α é uma difusividade genérica. A equação diferencial unidirecional que descreve este tipo de problema é dada por

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2} - Pe \frac{du}{dx} = 0, & x \in (0, 1) \\ \frac{du(0)}{dx} = u(0) - 1; & u(1) = 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

Verifica-se na prática que para elevados números de Peclet como, por exemplo, $Pe = 30$, a solução em elementos finitos oscila em torno da solução analítica do problema e o seu erro relativo máximo encontra-se no penúltimo nó para o caso unidimensional. Além disso, uma estratégia de refinamento de malha nem sempre é capaz de solucionar este problema. Desta forma, métodos de estabilização foram desenvolvidos para produzir soluções estáveis e acuradas destes problemas. Dentre estes métodos destacam-se o Streamline-Upwind generalizado (*SU*), o Streamline-Upwind Petrov-Galerkin (*SUPG*) e o Galerkin/Least-squares (*GLS*).

4.3.8 Rudimentos de Estabilização

Do que foi dito anteriormente, sabe-se que o método de Galerkin aplicado em elementos finitos não é adequado para a resolução de problemas convectivos difusivos com elevados números de Peclet. Para melhor verificar a importância dos efeitos difusivos e convectivos torna-se útil a introdução de um número de Peclet de malha ou local dado por

$$Pe_h = \frac{ah}{2\nu} \quad (4.20)$$

em que a é a velocidade do escoamento ou termo advectivo, h é o tamanho de cada elemento e ν é o coeficiente de difusividade.

No cenário dos elementos finitos, diversas técnicas podem ser adotadas com o intuito de introduzir o efeito upwinding. A primeira formulação deste tipo foi apresentada em 1970 pelos grupos de pesquisa Dundee e Swansea e outras formulações foram apresentadas também por outros grupos nesta mesma década (Donea & Huerta, 2003).

Inicialmente, duas tentativas de estabilizar o método foram realizadas. Primeiramente, uma difusão artificial foi adicionada com o fim de contrapor a difusividade numérica negativa introduzida pelo método de Galerkin. Esta primeira abordagem baseou-se em elementos lineares. Posteriormente, uma aproximação *upwind* foi adotada. Nesta aproximação, a filosofia foi de modificar as funções peso de modo que o elemento localizado a montante do escoamento tivesse um peso maior que outro a jusante, em uma tentativa de reduzir a influência convectiva do fluido em movimento. Esta nova metodologia ficou conhecida como formulação de Petrov-Galerkin.

Sejam dois elementos vizinhos, e e $e + 1$, como podem ser vistos na Figura 7. Neste caso, as novas funções peso modificadas \tilde{w}_j darão maior peso para o elemento a montante, e , do que o a jusante, $e + 1$.

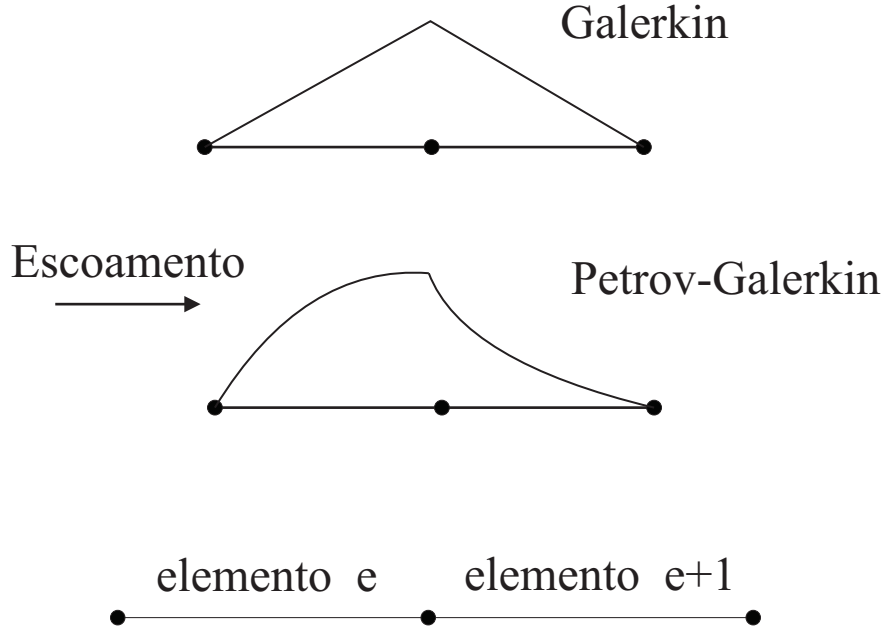


Figura 7 – Representação das funções de base de Galerkin e Petrov-Galerkin assim como o posicionamento de dois elementos consecutivos, e e $e + 1$.

Estas funções podem ser construídas somando e subtraindo um parâmetro β às funções de base ou peso de Galerkin. Lembre-se que no método de Galerkin as funções peso são iguais às funções de base usadas para expandir o campo de velocidade ou de temperatura. Assim,

$$\tilde{w}_j = \begin{cases} \tilde{w}_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) + \frac{3}{4}\beta(1 + \xi^2) & \text{no elemento } e \\ \tilde{w}_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) - \frac{3}{4}\beta(1 + \xi^2) & \text{no elemento } e + 1 \end{cases} \quad (4.21)$$

em que o parâmetro β controla a quantidade de difusidade numérica ou *upwinding*. Com isso, a escolha de um valor de β adequado evita um comportamento oscilatório da solução do problema. O valor ótimo para este parâmetro é dado por

$$\beta_{\text{ótimo}} = \coth Pe - \frac{1}{Pe} \quad (4.22)$$

onde o valor de Pe é dado pela equação (4.20) (Donea & Huerta, 2003).

Além disso, Donea & Huerta (2003) mostraram que a alternativa de adicionar uma difusidade artificial à formulação fraca de um problema convectivo difusivo tem o mesmo efeito das modificações impostas pelo método *upwinding*. Esta difusão artificial é adicionada ao termo difusivo da equação governante, ν , e é dada por

$$\bar{\nu} = \beta \frac{ah}{2}. \quad (4.23)$$

Note que o valor de $\bar{\nu}$ é governado pelo parâmetro β que pode variar de zero a um ($0 \leq \beta \leq 1$). O valor ótimo de β é dado pela relação (4.22) e quando $\beta = 1$ temos uma configuração conhecida como *full upwinding*. Assim, no caso unidimensional, a forma fraca da equação governante (4.23) se torna

$$\int_0^L \left[\left(w + \beta \frac{h}{2} w_x \right) a u_x + w_x \nu u_x \right] dx \quad (4.24)$$

em que L é o tamanho do domínio e o subscrito x denota derivada com respeito a esta variável.

É importante frisar que a forma fraca já modificada com o termo difusivo artificial possui uma função peso alterada apenas para a parte convectiva. E isto faz com que a equação (4.24) não corresponda a uma formulação consistente de Petrov-Galerkin. Mais uma vez, as funções de peso modificadas atribuem uma importância maior para os elementos a montante do escoamento. Em múltiplas dimensões este cenário é conhecido como o método *Streamline-Upwinding (SU)* em que a difusão artificial é adicionada apenas na direção tangente ao vetor velocidade e não transversalmente a esta.

4.3.8.1 Caso Multidimensional SU

A razão para introduzir a difusão artificial apenas na direção do escoamento é porque o transporte convectivo ocorre ao longo das linhas de corrente e a adição de uma difusividade na direção transversal leva a resultados altamente difusivos. A ideia da construção de um operador tensorial para atingir esta finalidade surgiu no final da década de 70 (Donea & Huerta, 2003). Esta ideia concretiza-se ao substituir o coeficiente de difusão artificial escalar dado por (4.23) por um tensor de difusividade como segue

$$\tilde{\nu}_{ij} = \bar{\nu} a_i a_j / \|\mathbf{a}\|^2. \quad (4.25)$$

em que a_i é a componente do vetor velocidade, \mathbf{a} , ao longo da direção x_i .

A forma fraca do problema difusivo convectivo na forma vetorial pode ser reescrita como

$$\int_{\Omega} [w (\mathbf{a} \cdot \nabla u) + \nabla w \cdot (\nu \mathbf{I} + \tilde{\nu}) \cdot \nabla u] d\Omega, \quad (4.26)$$

em que \mathbf{I} é o tensor identidade. Note que esta formulação já inclui o termo de difusão artificial dado por $\tilde{\nu}$. De fato, da definição dada por (4.25), o termo adicional pode ser modificado como segue

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \tilde{\nu} \cdot \nabla u d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\bar{\nu}}{\|\mathbf{a}\|^2} (\mathbf{a} \cdot \nabla w) \cdot (\mathbf{a} \cdot \nabla u) d\Omega$$

Dessa maneira, a forma fraca (4.26) pode ser reescrita como

$$\int_{\Omega} \left\{ \left[w + \frac{\bar{\nu}}{\|\mathbf{a}\|^2} (\mathbf{a} \cdot \nabla w) \right] (\mathbf{a} \cdot \nabla u) + \nu \nabla w \cdot \nabla u \right\} d\Omega = 0.$$

Desta relação percebe-se que a função peso do método SU , que afeta apenas o termo convectivo, é definida como

$$\tilde{w} = w + \frac{\bar{\nu}}{\|\mathbf{a}\|^2} (\mathbf{a} \cdot \nabla w). \quad (4.27)$$

Finalmente, o método SU pode ser entendido como um método de Galerkin acrescido de um termo extra que introduz os efeitos de uma difusão numérica artificial. Assim,

$$\underbrace{\int_{\Omega} [w (\mathbf{a} \cdot \nabla u) + \nu \nabla w \cdot \nabla u] d\Omega}_{\text{Galerkin}} + \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\bar{\nu}}{\|\mathbf{a}\|^2} (\mathbf{a} \cdot \nabla w) (\mathbf{a} \cdot \nabla u) d\Omega}_{\text{Termo } SU \text{ Adicional}} = 0. \quad (4.28)$$

A função peso modificada pode ser aplicada em todos os termos da formulação fraca (4.26) com a finalidade de obter uma formulação mais consistente. Este conceito de adição de difusão na direção da linha de corrente englobando todos os termos do resíduo é a base do método conhecido na literatura como *Streamline-Upwind Petrov-Galerkin (SUPG)*. Esta abordagem também assegura a consistência do método o que significa dizer que a solução da formulação diferencial (forma forte) é, também, solução da forma fraca do problema.

Neste trabalho a estabilização do método numérico apresentado nas primeiras seções deste capítulo foi feita usando o método de estabilização SU . Isso porque o problema da camada limite envolve a resolução das equações de Navier-Stokes para elevados números de Reynolds.

4.3.9 Método numérico estabilizado para um fluido Newtoniano

Dada a equação do resíduo da quantidade de movimento em sua forma vetorial e expandida, (4.13), aplicou-se o método de estabilização SU como sugerido em (4.28) de tal forma que o novo resíduo resultante foi

$$\begin{aligned} R_m^{SU} = & \int_{\Omega} \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{T} : \nabla \mathbf{w} d\Omega - \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{w} d\Gamma + \\ & + \sum_e \int_{\Omega^e} \rho \frac{\bar{\nu}}{\|\mathbf{u}\|^2} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) d\Omega. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Do ponto de vista do elemento, rearranjando a equação (4.29) tem-se que

$$R_m^{SU^e} = \int_{\Omega^e} \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \left[\mathbf{w} + \frac{\bar{\nu}}{\|\mathbf{u}\|^2} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}) \right] d\Omega + \int_{\Omega^e} \mathbf{T} : \nabla \mathbf{w} d\Omega \quad (4.30)$$

em que $\bar{\nu} = \beta \frac{\mathbf{u}_x h}{2}$. Note que \mathbf{u}_x é a componente da velocidade \mathbf{u} na direção \mathbf{x} , que neste caso é a direção do escoamento.

Com base no que foi apresentado, a formulação estável dos resíduos das equações de Navier-Stokes é dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} R_m^{SU^e} = \int_{\Omega^e} \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \left[\mathbf{w} + \frac{\bar{v}}{\|\mathbf{u}\|^2} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}) \right] d\Omega + \int_{\Omega^e} \mathbf{T} : \nabla \mathbf{w} d\Omega \\ R_c^{SU^e} = \int_{\Omega^e} (\nabla \cdot \mathbf{u}) d\Omega \end{array} \right. \quad (4.31)$$

Aplicando a mesma metodologia exposta neste capítulo, os resíduos obtidos para as componentes da equação vetorial (4.30) nas direções \mathbf{x} e \mathbf{y} foram

$$\begin{aligned} R_{mx}^i &= \int_{\Omega^e} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left[\psi_i + \tau \underbrace{\left(u \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + v \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right)}_* \right] + \\ &+ \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \mathbf{T}_{xx} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \mathbf{T}_{yx} d\Omega \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} R_{my}^{SU^i} &= \int_{\Omega^e} \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left[\psi_i + \tau \underbrace{\left(u \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + v \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right)}_* \right] + \\ &+ \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \mathbf{T}_{xy} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \mathbf{T}_{yy} d\Omega \end{aligned} \quad (4.33)$$

em que $\tau = \frac{\bar{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}$ e \mathbf{T}_{xx} , \mathbf{T}_{xy} , \mathbf{T}_{yx} e \mathbf{T}_{yy} são as componentes do tensor de tensões \mathbf{T} dadas pela equação (4.14). O termo destacado em (*) é constante para um dado elemento. No cálculo iterativo do resíduo este termo pode ser avaliado uma única vez para cada elemento. O resíduo da equação da continuidade continua o mesmo da equação (4.17).

Seguindo a linha de raciocínio desenvolvida neste trabalho, as expressões para os novos elementos de cada linha da matriz Jacobiana elementar são dados por:

- Jacobiano de $R_{mx}^{SU^i}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{mx}^{SU^i}}{\partial U_j} &= \int_{\Omega_e} \rho \left(\phi_j \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + v \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) \psi_i + \\
&+ \rho \tau \left[2u \frac{\partial u}{\partial x} \phi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + u^2 \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \left(\phi_j \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right) v \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right] + \\
&+ \rho \tau \left[\left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y} u + \frac{\partial u}{\partial y} \phi_j \right) v \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + v^2 \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right] + \\
&+ 2\mu \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} d\Omega; \\
\frac{\partial R_{mx}^{SU^i}}{\partial V_j} &= \int_{\Omega_e} \rho \psi_i \phi_j \frac{\partial u}{\partial y} + \rho \tau \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \phi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial y} + u \frac{\partial u}{\partial y} \phi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + 2v \frac{\partial u}{\partial y} \phi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) + \\
&+ \mu \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} d\Omega; \\
\frac{\partial R_{mx}^{SU^i}}{\partial P_j} &= \frac{\partial R_{mx}^i}{\partial P_j}
\end{aligned}$$

- Jacobiano de $R_{my}^{SU^i}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{my}^{SU^i}}{\partial U_j} &= \int_{\Omega_e} \rho \psi_i \phi_j \frac{\partial v}{\partial x} + \rho \tau \left(2u \frac{\partial v}{\partial x} \phi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} \phi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} \phi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} d\Omega; \\
\frac{\partial R_{my}^{SU^i}}{\partial V_j} &= \int_{\Omega_e} \rho \psi_i \left(u \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \phi_j \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) + \rho \tau \left[u^2 \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + u \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} v + \phi_j \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \\
&+ \rho \tau \left[u \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y} v + \phi_j \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \left(2v \phi_j \frac{\partial v}{\partial y} + v^2 \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) \right] + \\
&+ \mu \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} d\Omega_e; \\
\frac{\partial R_{my}^{SU^i}}{\partial P_j} &= \frac{\partial R_{my}^i}{\partial P_j}
\end{aligned}$$

- Jacobiano da Continuidade:

$$\frac{\partial R_c^{SU^i}}{\partial U_j} = \frac{\partial R_c^i}{\partial U_j};$$

$$\frac{\partial R_c^{SU^i}}{\partial V_j} = \frac{\partial R_c^i}{\partial V_j};$$

$$\frac{\partial R_c^{SU^i}}{\partial P_j} = 0.$$

4.3.10 Método numérico estabilizado para uma emulsão diluída

O modelo numérico de uma emulsão monodispersa e diluída baseou-se na construção de toda a teoria apresentada incorporando ao tensor de tensões \mathbf{T} as componentes do tensor de tensões induzido pela fase dispersa $\boldsymbol{\sigma}^d$. A equação (2.51) define o formato deste tensor adicional e será repetida aqui para facilitar a compreensão

$$\boldsymbol{\sigma}^d = \phi \mu (c_3 \mathbf{E} + c_4 \mathbf{A} + c_5 \mathcal{F}[\mathbf{A}, \mathbf{E}])$$

Lembrando que $c_3 = \left(5 - \frac{25}{2\lambda}\right)$, $c_4 = 4 \frac{\sigma}{\lambda \mu a}$, $c_5 = \frac{15}{7}$ e que as componentes do tensor $\boldsymbol{\sigma}^d$ são dadas por

$$\sigma_{11}^d = -\mu \phi \left[\frac{c_2 c_4 \dot{\gamma}^2}{2(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)} - \frac{c_1 c_2 c_5 \dot{\gamma}^2}{6(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)} \right],$$

$$\sigma_{22}^d = -\sigma_{11}^d,$$

$$\sigma_{33}^d = -c_1 c_2 c_5 \mu \phi \frac{\dot{\gamma}^2}{3(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)},$$

$$\sigma_{12}^d = -\mu \phi \left[\frac{c_3 \dot{\gamma}}{2} + \frac{c_1 c_2 c_4 \dot{\gamma}}{2(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)} \right],$$

$$\sigma_{12}^d = \sigma_{21}^d,$$

$$\sigma_{13}^d = \sigma_{32}^d = \sigma_{13}^d = 0.$$

Na forma matricial temos que

$$\boldsymbol{\sigma}^d = -\mu\phi \begin{bmatrix} \frac{\dot{\gamma}^2}{c_1^2 + \dot{\gamma}^2} \left(\frac{c_2 c_4}{2} - \frac{c_1 c_2 c_5}{6} \right) & \frac{c_3 \dot{\gamma}}{2} + \frac{c_1 c_2 c_4}{2} \frac{\dot{\gamma}^2}{(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)} \\ \frac{c_3 \dot{\gamma}}{2} + \frac{c_1 c_2 c_4}{2} \frac{\dot{\gamma}^2}{(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)} & -\frac{\dot{\gamma}^2}{c_1^2 + \dot{\gamma}^2} \left(\frac{c_2 c_4}{2} - \frac{c_1 c_2 c_5}{6} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{xx}^d & \boldsymbol{\sigma}_{xy}^d \\ \boldsymbol{\sigma}_{yx}^d & \boldsymbol{\sigma}_{yy}^d \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

em que $c_1 = \frac{20}{19} \frac{\sigma}{\lambda \mu a}$ e $c_2 = \frac{5}{2\lambda}$, como foi definido no capítulo 3.

Para fins de organização, a equação (4.34) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\boldsymbol{\sigma}^d = -\mu\phi \begin{bmatrix} \frac{\dot{\gamma}^2}{c_1^2 + \dot{\gamma}^2} (E - B) & F\dot{\gamma} + D \frac{\dot{\gamma}^2}{(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)} \\ F\dot{\gamma} + D \frac{\dot{\gamma}^2}{(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)} & -\frac{\dot{\gamma}^2}{c_1^2 + \dot{\gamma}^2} (E - B) \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

em que $B = \frac{c_1 c_2 c_5}{6}$, $D = \frac{c_1 c_2 c_4}{2}$, $E = \frac{c_2 c_4}{2}$ e $F = \frac{c_3}{2}$. Lembre-se que $\dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial y}$.

Assim, os novos resíduos da equação do movimento para uma emulsão diluída nas direções \mathbf{x} e \mathbf{y} são dados por

$$\begin{aligned} R_{mx}^{e_i} &= \int_{\Omega^e} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left[\psi_i + \tau \left(u \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + v \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial \psi_i}{\partial x} (\mathbf{T}_{xx} + \boldsymbol{\sigma}_{xx}^d) + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} (\mathbf{T}_{yx} + \boldsymbol{\sigma}_{yx}^d) d\Omega, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} R_{my}^{e_i} &= \int_{\Omega^e} \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left[\psi_i + \tau \left(u \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + v \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial \psi_i}{\partial x} (\mathbf{T}_{xy} + \boldsymbol{\sigma}_{xy}^d) + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} (\mathbf{T}_{yy} + \boldsymbol{\sigma}_{yy}^d) d\Omega. \end{aligned} \quad (4.37)$$

As expressões para os elementos da matriz Jacobiana serão as mesmas obtidas para o caso Newtoniano acrescidos da contribuição do tensor de tensões da fase dispersa. Neste sentido, os novos termos desta matriz são:

- Jacobiano de $R_{mx}^{e^i}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{mx}^{e^i}}{\partial U_j} &= \int_{\Omega_e} \rho \left(\phi_j \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + v \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) \psi_i + \\
&+ \rho \tau \left[2u \frac{\partial u}{\partial x} \phi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + u^2 \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \left(\phi_j \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right) v \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right] + \\
&+ \rho \tau \left[\left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y} u + \frac{\partial u}{\partial y} \phi_j \right) v \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + v^2 \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right] + \\
&+ 2\mu \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left[-\mu \phi (E - B) \cdot m + 2\mu \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right] + \\
&+ \mu \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \phi_j}{\partial y} - n \right\} d\Omega; \\
\frac{\partial R_{mx}^{e^i}}{\partial V_j} &= \frac{\partial R_{mx}^{SU^i}}{\partial V_j} \\
\frac{\partial R_{mx}^{e^i}}{\partial P_j} &= \frac{\partial R_{mx}^{SU^i}}{\partial P_j}
\end{aligned}$$

- Jacobiano de $R_{my}^{SU^i}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{my}^{e^i}}{\partial U_j} &= \int_{\Omega_e} \rho \psi_i \phi_j \frac{\partial v}{\partial x} + \rho \tau \left(2u \frac{\partial v}{\partial x} \phi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} \phi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} \phi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) + \left(\mu \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} - n \right) + \\
&+ \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \mu \phi (E - B) \cdot m d\Omega; \\
\frac{\partial R_{my}^{e^i}}{\partial V_j} &= \frac{\partial R_{my}^{SU^i}}{\partial V_j} \\
\frac{\partial R_{my}^{e^i}}{\partial P_j} &= \frac{\partial R_{my}^{SU^i}}{\partial P_j}
\end{aligned}$$

- Jacobiano da Continuidade:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_c^{e^i}}{\partial U_j} &= \frac{\partial R_c^{SU^i}}{\partial U_j}; \\
\frac{\partial R_c^{e^i}}{\partial V_j} &= \frac{\partial R_c^{SU^i}}{\partial V_j}; \\
\frac{\partial R_c^{e^i}}{\partial P_j} &= 0.
\end{aligned}$$

Nestas equações as variáveis m e n valem, respectivamente,

$$m = 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \left\{ \left[c_1^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{-1} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \left[c_1^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{-2} \right\}$$

e

$$n = \phi \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \left\{ F + D \left[c_1^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{-1} - 2D \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \left[c_1^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{-2} \right\}.$$

4.3.11 Condições de Contorno

As condições de contorno utilizadas neste trabalho foram

- condição de contorno de Dirichlet;
- condição de saída de escoamento;
- condição de contorno de pressão.

As condições de Dirichlet e de saída de escoamento foram impostas para as fronteiras de um domínio retangular. A condição de contorno de pressão foi aplicada no centro de apenas um elemento deste domínio (Figura 8).

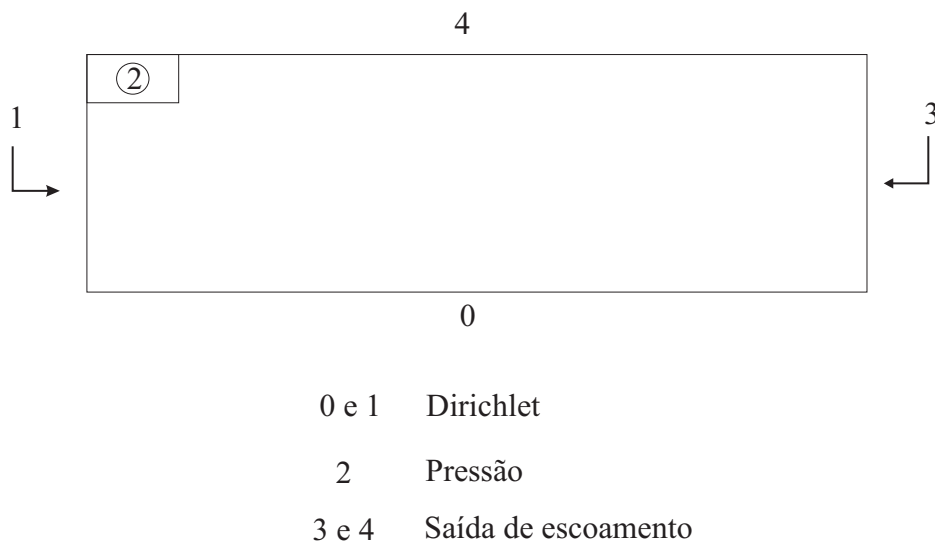


Figura 8 – Condições de contorno de Dirichlet, pressão e saída de escoamento aplicadas a uma malha retangular.

4.3.11.1 Condição de Contorno de Dirichlet

A condição de contorno de Dirichlet especifica o valor da velocidade ou de um de seus componentes na fronteira do domínio. As condições de contorno deste tipo são geralmente

impostas de uma forma essencial. Dessa forma, o resíduo associado ao grau de liberdade na fronteira passa a ser:

$$\begin{aligned} R_{mx}^i &= U_i - U_{conhecido}, \\ R_{my}^i &= V_i - V_{conhecido}, \end{aligned}$$

em que $U_{conhecido}$ e $V_{conhecido}$ são as velocidades que deseja-se impor a U_i e V_i , respectivamente. Como forçamos que o resíduo seja zero em cada grau de liberdade, a velocidade oriunda da condição de contorno será igual a velocidade do escoamento naquele grau de liberdade associado, de modo que, $U_i = U_{conhecido}$ e $V_i = V_{conhecido}$.

4.3.11.2 Condição de Saída de Escoamento

As condições de contorno de saída de escoamento são caracterizadas por serem apenas a derivada de velocidade. Como no caso de um escoamento desenvolvido, esta condição de contorno pode ser escrita como $\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0$. Esta relação, em coordenadas cartesianas, pode ser vista da seguinte maneira

$$\begin{cases} n_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_y \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ n_x \frac{\partial v}{\partial x} + n_y \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

em que n_x e n_y são as componentes do vetor normal \mathbf{n} à superfície de saída do escoamento.

Esta condição será introduzida de forma natural de modo que o resíduo para a equação de movimento para um fluido Newtoniano assume o seguinte formato

$$\mathbf{R} = \int_{\Omega} [\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} + \mathbf{T} : \nabla \mathbf{w}] d\Omega - \int_{\Gamma} \phi_i (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}) d\Gamma, \quad (4.39)$$

onde

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{n} \cdot (-p\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) = -p\mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}^T.$$

Substituindo esta relação na equação (4.39) obtemos a seguinte expressão para o resíduo

$$\mathbf{R} = \int_{\Omega} [\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} + \mathbf{T} : \nabla \mathbf{w}] d\Omega - \int_{\Gamma} \phi_i (-p\mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}^T) d\Gamma,$$

em que o termo $\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0$ pois o vetor normal \mathbf{n} é perpendicular ao gradiente de velocidade $\nabla \mathbf{u}$. Com isso,

$$\mathbf{R} = \int_{\Omega} [\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} + \mathbf{T} : \nabla \mathbf{w}] d\Omega - \int_{\Gamma} \phi_i (-p\mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}^T) d\Gamma, \quad (4.40)$$

em que os campos de velocidade e pressão devem ser determinados.

Desta forma, os resíduos da equação do movimento nas direções \mathbf{x} e \mathbf{y} , são, respectivamente,

$$\begin{aligned} R_{mx}^i &= \int_{\Omega} \rho \phi_i \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \left(-p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] d\Omega - \int_{\Gamma} \phi_i \left(-p n_x + n_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_y \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\Gamma; \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} R_{my}^i &= \int_{\Omega} \rho \phi_i \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \left(-p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} \phi_i \left(-p n_y + n_x \frac{\partial u}{\partial y} + n_y \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Gamma; \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.42)$$

É importante lembrar que pelo método de Galerkin, $\phi_i = \psi_i$.

O cálculo da integral de linha $\int_{\Gamma} \phi_i (-p \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}^T) d\Gamma$ considera um elemento localizado na saída do escoamento, onde a condição de escoamento desenvolvido é imposta como condição de contorno. Para cada elemento deste tipo, os seguintes passos devem ser realizados:

1. Calcular o resíduo \mathbf{R} sem se preocupar com a condição de contorno;
2. Verificar se alguma condição tem que ser imposta ao elemento.

Como a condição de contorno é natural, é preciso adicionar os termos da integral de linha aos graus de liberdade associados aos nós de fronteira. Estes graus de liberdade podem ser identificados pela Tabela 2 e, para a fronteira 3 da Figura 8, a integral de linha deve ser acrescentada aos resíduos 2, 3, 6, 11, 12 e 15. Assim,

$$\begin{aligned} R_2 &= R_2 + \int_{\Gamma} \phi_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T})_x d\Gamma, & R_{11} &= R_{11} + \int_{\Gamma} \phi_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T})_y d\Gamma, \\ R_3 &= R_3 + \int_{\Gamma} \phi_3 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T})_x d\Gamma, & R_{12} &= R_{12} + \int_{\Gamma} \phi_3 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T})_y d\Gamma, \\ R_6 &= R_6 + \int_{\Gamma} \phi_6 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T})_x d\Gamma, & R_{15} &= R_{15} + \int_{\Gamma} \phi_6 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T})_y d\Gamma, \end{aligned} \quad (4.43)$$

A mesma lógica se aplica para a fronteira 4 do domínio exposto na Figura 8. Neste caso, os graus de liberdade associados aos nós de fronteira são 3, 4, 7, 12, 13 e 16.

A integração numérica de cada uma destas integrais de linha pode ser realizada usando a Quadratura de Gauss com 3 pontos de integração. De uma maneira geral,

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F}(x, y) d\Gamma = \int_{-1}^1 \widetilde{\mathbf{F}}(\xi = 1, \eta) \frac{d\Gamma}{d\eta} d\eta, \quad (4.44)$$

em que $\frac{d\Gamma}{d\eta} = \left[\left(\frac{dx}{d\eta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\eta} \right)^2 \right]^{1/2}$.

Nesta situação, como o valor de ξ está fixo, a função varia somente com respeito a η e, assim, a integração em coordenadas elementares é ao longo da direção η . Por exemplo,

$$\int_{\Gamma} \phi_2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{T})_x d\Gamma = \sum_{IGP=1}^3 \phi_i(\eta_{GP}) \left(-p n_x + n_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_y \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{\eta_{GP}} \frac{d\Gamma}{d\eta} \cdot W_{GP} \quad (4.45)$$

As outras integrais de linha seguem o mesmo raciocínio.

4.3.11.3 Condição de Contorno de Pressão

Resta agora tratar da condição de contorno correspondente ao campo de pressão. Sabe-se que o campo de pressão que satisfaz as equações de Navier-Stokes pode ser determinado a menos de uma constante, ou seja, $P_1 = P + P_0$. Então, o nível de pressão do escoamento pode ser fixado como uma condição de contorno ou arbitrariamente. Os resíduos da continuidade são aqueles ligados ao campo de pressão. Com isso, para determinar o valor da pressão em um dado elemento, podemos impor uma condição de contorno essencial, de tal forma que o resíduo associado ao primeiro grau de liberdade de pressão, P_1 , em cada elemento seja dado por

$$R_{19} = P_1 + P^*. \quad (4.46)$$

Em (4.46), P^* é a pressão a ser imposta a um determinado elemento e R_{19} é o décimo nono resíduo correspondente ao primeiro grau de liberdade de pressão localizado no centro do elemento $(\xi, \eta) = (0, 0)$.

5 Resultados e discussões

O primeiro resultado obtido neste trabalho é apresentado de modo a validar o método numérico exposto comparando o perfil de velocidade de um fluido Newtoniano com os perfis analíticos de camada limite apresentados na literatura. Feito isso, uma análise da camada limite da emulsão é feita tendo em vista a verificação da similaridade dos perfis de velocidade e um estudo dos termos da equação modelo apresentada no capítulo 3 é realizado.

Em todos os casos uma malha 20x30 com concentração de elementos nas proximidades da parede foi utilizada. O tamanho escolhido para a malha foi de 0,30 metros de altura e de 1,999 metros de comprimento. Um valor inicial para o comprimento de 0,001 foi escolhido pois o ponto inicial da placa em $x = 0,000$ corresponde a um choque muito severo do escoamento com a placa o que torna difícil a convergência do método. As malhas foram reproduzidas pelo gerador de malha *GiD*.

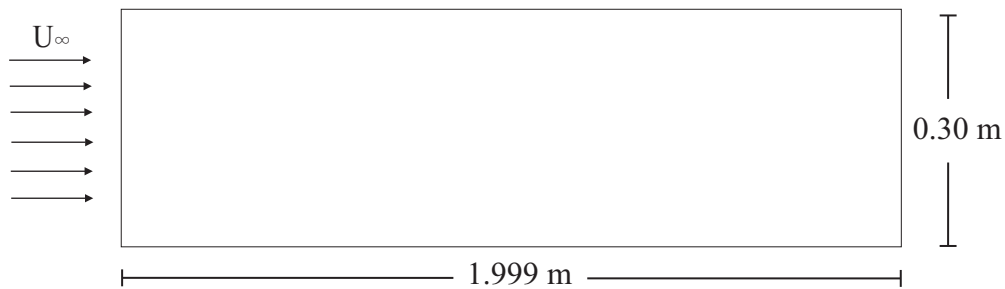


Figura 9 – Dimensões do domínio de cálculo utilizado para gerar os resultados deste trabalho.

O número de pontos de Gauss usados para o cálculo das integrais por Quadratura Gaussiana foi igual a 6.

5.1 Parâmetros de Entrada

O fluido Newtoniano simulado foi a água e para o caso da emulsão considerou-se uma mistura de água e óleo. Os parâmetros físicos das simulações adotados para a água e para a emulsão foram (Çengel, 2007):

- Água
 - Massa específica (ρ): 1000,0 kg/m^3 ;
 - Viscosidade dinâmica (μ): 0,001 Ns/m^2 ;

- Emulsão
 - Viscosidade dinâmica (μ_d): $0,008 \text{ N s/m}^2$;
 - Tensão superficial (σ): $0,040 \text{ N/m}$.

Os dados para a emulsão foram baseados nas propriedades do óleo SAE 30. Os outros parâmetros de entrada do programa foram:

- Velocidade do escoamento (U_∞): $0,007 \text{ m/s}$;
- Raio da gota (a): $0,0001 \text{ m}$;
- Concentração da fase dispersa (ϕ): $0,30$.

É importante notar que o parâmetro de entrada U_∞ foi escolhido de acordo com o comprimento da malha afim de garantir uma condição elevada do número de Reynolds em uma determinada região de análise. Neste caso, esta região concentrou-se no intervalo $1.0 \leq x \leq 2.0 \text{ m}$ onde o número de Reynolds varia de $7,0 \times 10^3$ até $1,4 \times 10^4$ que está dentro de uma faixa de escoamento laminar (White, 2011).

Além disso, foi estipulada uma tolerância de $1,0 \times 10^{-6}$ para a convergência do método de Newton-Raphson. Neste aspecto, a tolerância está associada ao tamanho da norma do resíduo da solução do sistema linear. Com isso, se a norma deste resíduo for menor que a tolerância estipulada, então considera-se que o método convergiu para um resultado aceitável.

5.2 Camada limite de um fluido Newtoniano

A validação dos resultados obtidos para a camada limite de um fluido Newtoniano, foi feita comparando-se o perfil de velocidade adimensional simulado numericamente com os perfis Parabólico, Cúbico e de Blasius encontrados na literatura (White, 2011). As equações que definem cada um destes perfis são:

- Perfil Parabólico

$$u(y) = U_\infty \left[2 \left(\frac{y}{\delta} \right) - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right]; \quad (5.1)$$

- Perfil Cúbico

$$u(y) = U_\infty \left[\frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right]; \quad (5.2)$$

- Solução de Blasius

H. Blasius obteve a solução para o perfil de velocidade da camada limite laminar sobre uma placa plana de um escoamento bidimensional, incompressível, em regime permanente e sem gradiente de pressão. A engenhosidade desta solução recai sobre a introdução de uma variável adimensional, η , para computar os valores da coordenada y e de uma função

corrente, também adimensional, $f(\eta)$, para ser usada no lugar de uma função corrente dimensional, ψ . Para entender melhor o que foi feito, façamos uma breve descrição das origens destas relações adimensionais.

As equações governantes para a camada limite de Blasius são dadas por

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (5.4)$$

As condições de contorno são dadas por

1. Na parede, em $y = 0$, $u = v = 0$;
2. À medida que $y \rightarrow \infty$, $u = U_\infty$.

A equação expressa em (5.3) é satisfeita se as componentes u e v de velocidade são provenientes de uma função corrente ψ de tal forma que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad e \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5.5)$$

Substituindo estas relações diferenciais para u e v na equação (5.3), obtém-se

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}. \quad (5.6)$$

O objetivo agora é reduzir esta equação diferencial parcial a uma equação diferencial ordinária. Para atingir tal meta, Blasius introduziu a variável adimensional η definida por

$$\eta(x, y) = \frac{y}{\sqrt{\nu x / U_\infty}} \quad (5.7)$$

e a função corrente adimensional, $f(\eta)$, dada por

$$f(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{\nu x U_\infty}}, \quad (5.8)$$

mencionadas anteriormente. E a equação (5.8) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\psi(x, \eta) = \sqrt{\nu x U_\infty} f(\eta). \quad (5.9)$$

Dessa forma, usando as relações (5.7) e (5.9), as derivadas parciais presentes em (5.6) podem ser reescritas da como segue (Pao, 1967)

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_\infty \frac{df}{d\eta}; \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = \frac{U_\infty}{\sqrt{\nu x / U_\infty}} \frac{d^2 f}{d\eta^2}; \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = \frac{U_\infty}{\nu x / U_\infty} \frac{d^3 f}{d\eta^3}; \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = -\frac{U_\infty \eta}{2x} \frac{d^2 f}{d\eta^2}; \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)_\eta = -\frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} \left(\frac{df}{d\eta} - \frac{f}{\eta} \right). \quad (5.14)$$

Agora, substituindo estes resultados na equação (5.6) e após algumas simplificações, a seguinte equação diferencial ordinária é obtida

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + \frac{1}{2} f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0, \quad (5.15)$$

com as seguintes condições de contorno

1. Em $\eta = 0$; $f = 0$ e $df/d\eta = 0$;
2. À medida que $\eta \rightarrow \infty$, $df/d\eta = 1$.

A equação (5.15) é não linear e, com isso, não pode ser resolvida diretamente para $f(\eta)$. Blasius obteve uma solução em séries expandindo $f(\eta)$ em uma série de potências com o seguinte formato

$$f(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^n \frac{A_2^{n+1} C_n}{(3n+2)!} \eta^{3n+2} \quad (5.16)$$

onde as constantes C_n foram calculadas por Blasius e os valores resultantes foram $C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 11$, $C_3 = 375$, $C_4 = 27897$ e $C_5 = 3817137$. A única quantidade desconhecida da equação (5.16) é A_2 a qual determinada pela segunda condição de contorno da equação (5.15). O valor para esta constante é 0,332.

Finalmente, com estes valores em mãos, a função $f(\eta)$ pode ser computada numericamente e o perfil de velocidade para a componente de velocidade u é obtido da relação (5.10) de modo que

$$\frac{u(\eta)}{U_\infty} = \frac{df}{d\eta} \quad (5.17)$$

em que a variável adimensional η é dada pela equação (5.7).

Agora, voltando ao estudo da validação do método numérico proposto, o resultado obtido desta análise encontra-se na Figura (10). Neste gráfico, a espessura da camada limite foi determinada usando a relação oriunda da solução de Blasius (White, 2011)

$$\delta_x = \frac{5,0 \cdot x}{\sqrt{Re_x}} \quad (5.18)$$

onde x representa a posição ao longo da placa plana. Os perfis foram determinados para uma seção de pontos extraídos ao longo da reta $x = 1, 2$. Vale ressaltar também que o chute inicial para o método de Newton-Raphson foi dado pela solução analítica da camada limite dada pela equação (5.2).

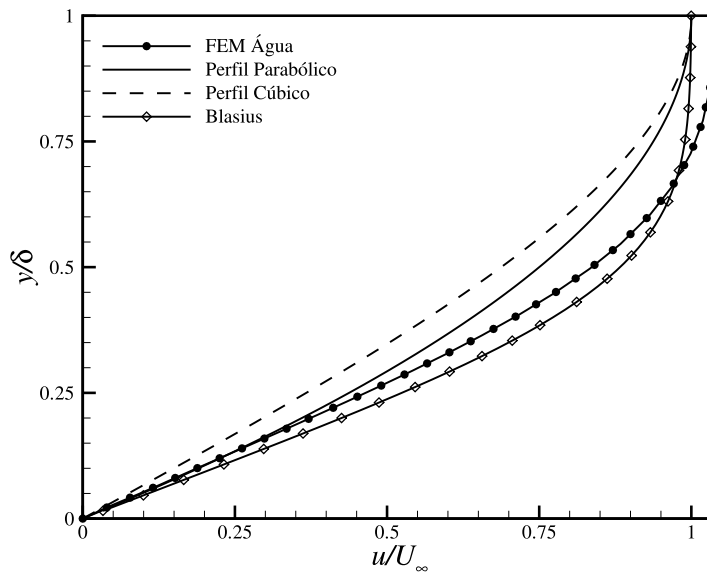


Figura 10 – Comparação do perfil obtido pelo método numérico com os perfis analíticos quadrático e cúbico.

As curvas da Figura (10) mostram a proximidade entre os valores obtidos pela simulação numérica e as soluções analíticas. Isso mostra que o método numérico em elementos finitos é consistente para a análise dos fenômenos físicos da camada limite. Com este respaldo, o método numérico foi adaptado para incluir as contribuições de tensão da fase dispersa nas equações de Navier-Stokes.

5.3 Camada limite de uma emulsão diluída

Esta parte do trabalho foca na análise e comparação dos resultados obtidos para o perfil de velocidade da camada limite de uma emulsão diluída com uma concentração de fase dispersa de 30%. Estudos da similaridade do perfil de velocidade e da importância dos termos da equação modelo para a camada limite deste fluido não Newtoniano também são realizados.

5.3.1 Comparação do perfil da emulsão com o perfil correspondente da fase contínua

Nesta primeira etapa dos estudos, uma comparação foi efetuada entre o perfil de velocidade da emulsão e o perfil correspondente da mesma sem o seu comportamento pseudo-plástico característico, que se observa em baixas e elevadas taxas de cisalhamento (isto é $Ca \ll 1$ e $Ca \gg 1$, respectivamente) (Oliveira, 2007). Neste caso, para a construção do perfil de velocidade correspondente da fase contínua, restringimos a análise para $Ca \rightarrow 0$. Este perfil foi obtido ao substituir o valor da viscosidade dinâmica de um fluido qualquer, neste caso a água, pela viscosidade efetiva de Taylor, μ_T , dada por

$$\mu_T = \mu \left[1 + \phi \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2\lambda} \right) \right],$$

lembrando que λ é a razão entre as viscosidades das fases dispersa e contínua, respectivamente. Vale reforçar que esta viscosidade efetiva corresponde a viscosidade da emulsão para baixos números de capilaridade e, neste regime, não se observa comportamento pseudo-plástico da mesma. Assim, a comparação é feita entre o perfil de velocidade da emulsão dentro da camada limite, onde observa-se elevadas taxas de cisalhamento, e o perfil de velocidade de um fluido com viscosidade equivalente a de uma emulsão submetida à baixas taxas de cisalhamento. Substituindo os valores dados pelos parâmetros de entrada, o valor calculado para a viscosidade efetiva de Taylor foi de $0.00169375 \text{ Ns/m}^2$.

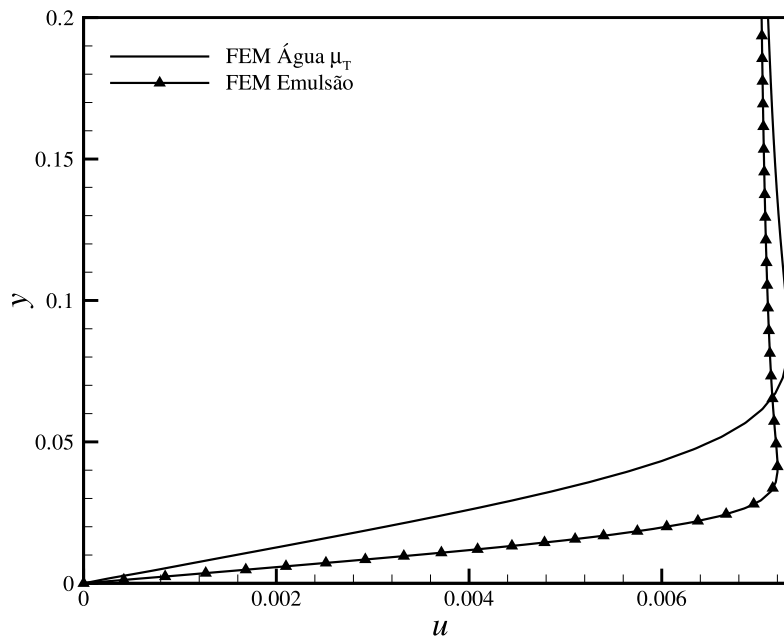


Figura 11 – Comparação entre o perfil da camada limite da emulsão com o perfil correspondente da fase contínua.

As curvas da Figura (11) demonstram que a diferença entre os dois perfis está intimamente ligada ao comportamento pseudo-plástico (*shear-thinning*) da emulsão e pela diferença de tensões normais na superfície da gota deformada. Estas propriedades são consequências da tendência de alinhamento e alongamento das gotas na direção do escoamento e são observadas à medida que se aumenta o número de capilaridade. Sabe-se que na fronteira da camada limite a taxa de cisalhamento é nula, ou seja, a emulsão nesta região possui um comportamento Newtoniano. À medida que descemos em direção à parede, as taxas de cisalhamento aumentam e o comportamento pseudo-plástico da emulsão é verificado. Esta evidência se mostra presente na Figura (11) em que uma redução de viscosidade característica reflete-se no afinamento da camada limite. Em regiões muito próximas à parede as taxas de cisalhamento são muito elevadas. No entanto, pelo que foi levantado neste trabalho, não é possível afirmar que, nesta região, a emulsão atingiu um nível de saturação onde a mesma se comportaria como um fluido de viscosidade efetiva dado por μ_B .

5.3.2 Similaridade dos perfis de velocidade

A análise da similaridade dos perfis de velocidade da camada limite da emulsão em estudo foi feita pela extração de 50 pontos ao longo de retas verticais em quatro posições diferentes da malha, posicionadas em $x = 1,0$, $x = 1,2$, $x = 1,4$ e $x = 1,6$. A extração dos pontos foi feita até uma altura correspondente a $y = 0,20\text{ m}$.

Para facilitar a visualização deste resultado, as variáveis dos eixos das ordenadas e abscissas foram adimensionalizadas. Para tanto, necessitou-se das espessuras da camada limite em cada uma destas seções do comprimento da malha. As espessuras foram obtidas da Figura (12) e os resultados foram

- $x = 1,0 \Rightarrow \delta_x = 0,026084\text{ m}$;
- $x = 1,2 \Rightarrow \delta_x = 0,028832\text{ m}$;
- $x = 1,4 \Rightarrow \delta_x = 0,031500\text{ m}$;
- $x = 1,6 \Rightarrow \delta_x = 0,033914\text{ m}$.

Dos gráficos levantados na Figura (13) é possível verificar que os perfis de velocidade para camada limite de uma emulsão diluída se repetem ao longo da placa. Isto indica a possível existência de uma variável de similaridade assim como ocorre com os perfis de velocidade de um fluido Newtoniano.

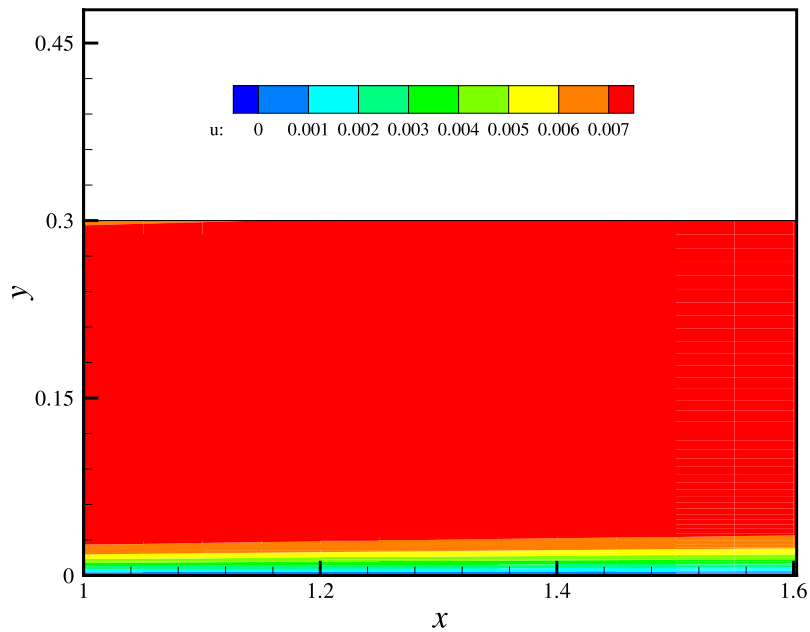


Figura 12 – Gráfico do campo de velocidade de uma emulsão monodispersa e diluída no intervalo de x variando entre 1,0 e 1,6 metros.

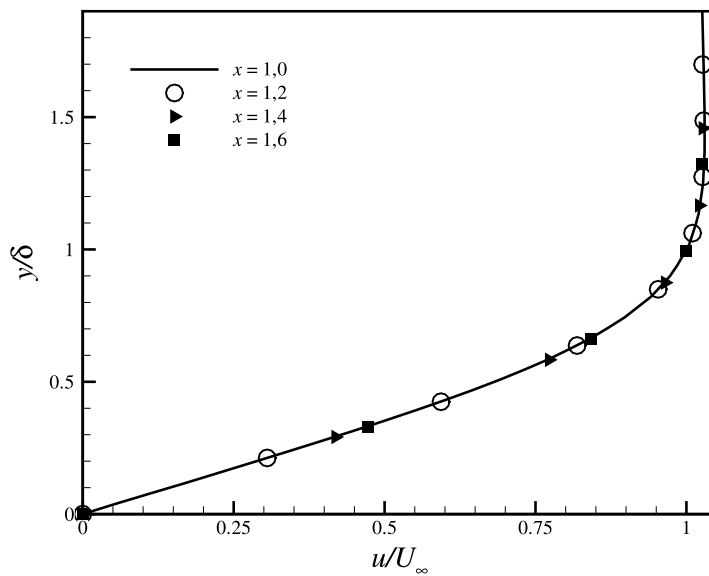


Figura 13 – Análise da similaridade do perfil de camada limite de uma emulsão parcialmente diluída.

5.3.3 Comparação dos termos do modelo de equação para a camada limite de uma emulsão diluída

A comparação dos termos do modelo de equações (3.17) e (3.18) proposto neste trabalho foi realizada por meio de um pós-processamento dos dados gerados da simulação da camada limite de uma emulsão. Neste caso, 1000 pontos foram extraídos de uma reta vertical na posição $x = 1,0$. Para efeitos de análise, dividiu-se cada uma das equações do modelo em termos da seguinte forma

- Direção x :

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = & \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \mu_B \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\text{Termo } 1_{\hat{e}_1}} + \underbrace{\mu \phi \left\{ \frac{1080}{133} \frac{\sigma}{\lambda^2 \mu a} \frac{\dot{\gamma} \dot{\gamma}_x}{(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)} \left[\frac{\dot{\gamma}^2}{(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)} - 1 \right] \right\}}_{\text{Termo } 2_{\hat{e}_1}} \\ & + \underbrace{\mu \phi \left\{ \frac{100}{19} \frac{\sigma^2}{\lambda^3 \mu^2 a^2} \frac{\dot{\gamma}_y}{(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)} \left[1 - \frac{2\dot{\gamma}^2}{(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)} \right] \right\}}_{\text{Termo } 3_{\hat{e}_1}}; \end{aligned}$$

- Direção y :

$$\begin{aligned} 0 = & \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \mu_B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}_{\text{Termo } 1_{\hat{e}_2}} + \underbrace{\mu \phi \left\{ \frac{1580}{133} \frac{\sigma}{\lambda^2 \mu a} \frac{\dot{\gamma} \dot{\gamma}_y}{(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)} \left[1 - \frac{\dot{\gamma}^2}{(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)} \right] \right\}}_{\text{Termo } 2_{\hat{e}_2}} \\ & + \underbrace{\mu \phi \left\{ \frac{100}{19} \frac{\sigma^2}{\lambda^3 \mu^2 a^2} \frac{\dot{\gamma}_x}{(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)} \left[1 - \frac{2\dot{\gamma}^2}{(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)} \right] \right\}}_{\text{Termo } 3_{\hat{e}_2}}. \end{aligned}$$

Dos resultados expostos nas Figuras (14), (15) e (16) nota-se que o segundo termo em ambas as direções \hat{e}_1 e \hat{e}_2 são nulos. Ainda nestas Figuras pode-se verificar que a contribuição dos termos na direção y é, aproximadamente, 1% da contribuição dos respectivos termos na direção x . Com base nisto, temos que o termo referente ao gradiente de pressão na direção y , $\frac{\partial p}{\partial y}$, está em balanço com termos de ordem de magnitude consideravelmente inferior aos termos que estão em balanço com $\frac{\partial p}{\partial x}$ na direção x . Sendo assim, pode-se perceber que dentro da camada limite deste possível modelo de equações, o termo $\frac{\partial p}{\partial y}$ pode ser negligenciado e que a pressão, p , é praticamente independente de y . Podemos então considerar que p é invariante com relação à esta direção e que, conseqüentemente, seu valor dentro camada limite é igual ao de fora desta fina camada. Esta conclusão está de acordo com o que é apresentado na literatura para

um fluido Newtoniano incompressível (Pao, 1967). Desta forma, temos que o possível modelo de equações para a camada limite de uma emulsão monodispersa e diluída reduz-se a

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \mu_B \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \phi \left\{ \frac{100}{19} \frac{\sigma^2}{\lambda^3 \mu^2 a^2} \frac{\dot{\gamma}_y}{(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)} \left[1 - \frac{2\dot{\gamma}^2}{(c_1^2 + \dot{\gamma}^2)} \right] \right\} \quad (5.19)$$

apenas na direção x . Vale lembrar que os termos em análise são de origem não Newtoniana e que estes efeitos, aparentemente, não afetam o fato do gradiente de pressão na camada limite depender apenas do escoamento fora da mesma.

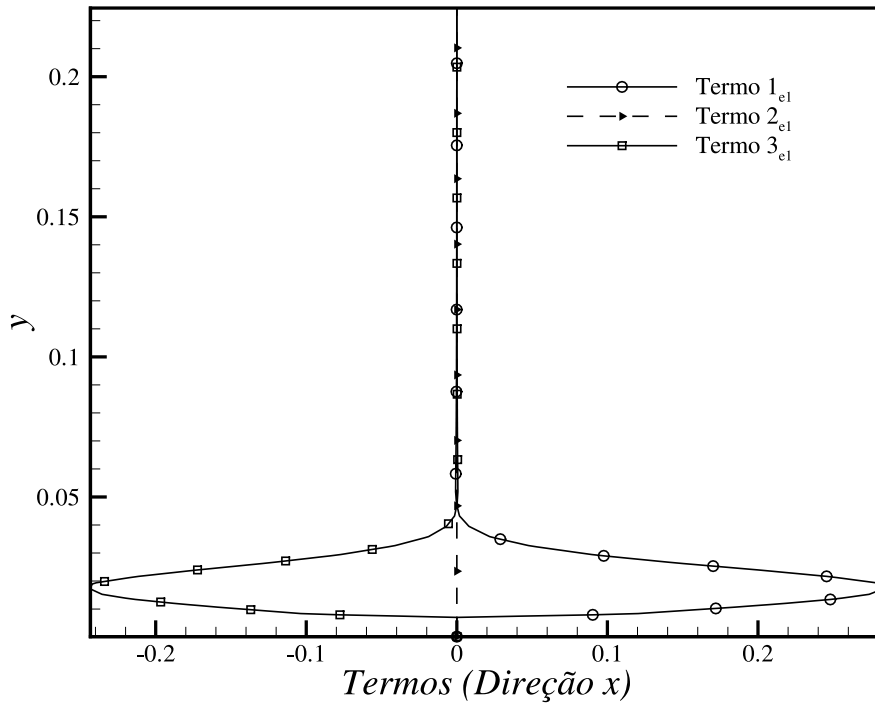


Figura 14 – Comparação dos termos do modelo de equações obtido neste trabalho na direção x .

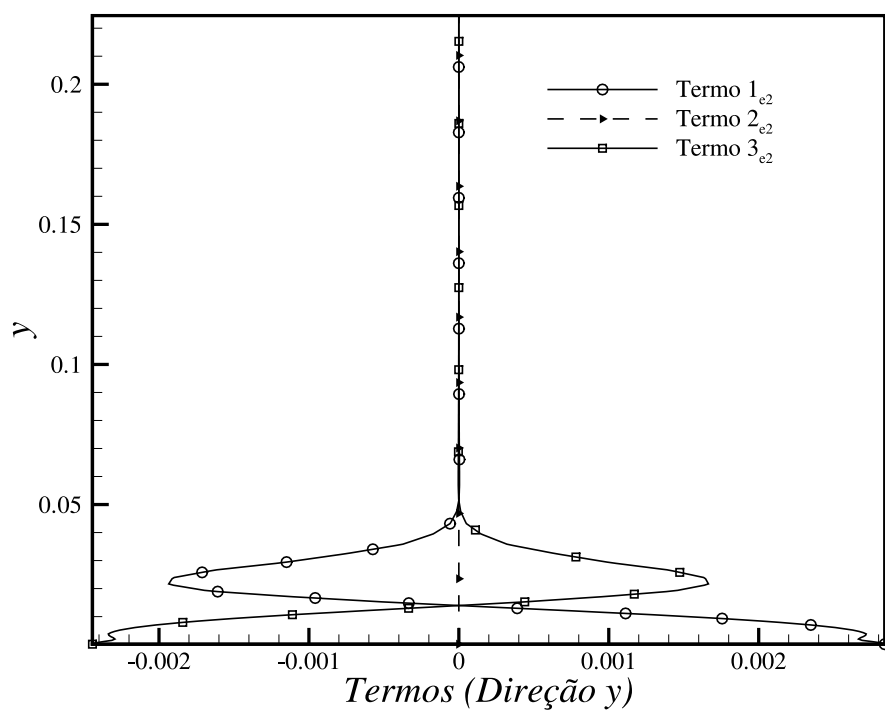


Figura 15 – Comparação dos termos do modelo de equações obtido neste trabalho na direção y .

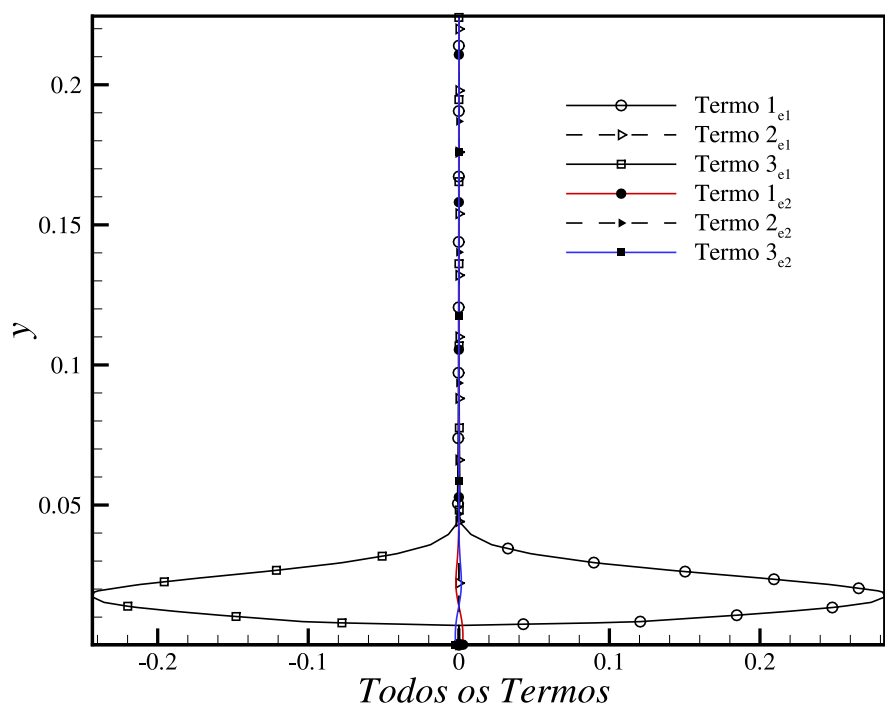


Figura 16 – Comparação dos termos do modelo de equações obtido neste trabalho.

6 Conclusões e trabalhos futuros

Neste trabalho apresentou-se um modelo de equações de movimento para a camada limite de uma emulsão monodispersa e diluída. Para tanto, conceitos básicos da mecânica dos fluidos foram expostos de modo a situar o leitor quanto ao ferramental utilizado para o desenvolvimento das equações. Mostrou-se que um escoamento de um fluido Newtoniano é descrito, tipicamente, pelas equações de movimento e da continuidade com suas devidas condições de contorno. Dentre elas a equação do movimento aparece retratando a influência de forças de superfície e de campo na variação do momento linear de um fluido qualquer. No entanto, devido às características do fluido em estudo, o tensor de tensões pode variar. Para o caso de uma emulsão, existe uma contribuição do tensor de tensões da gota no fluxo de quantidade de movimento da emulsão vista como um todo.

Um modelo constitutivo de duas equações, que trata da hidrodinâmica de uma emulsão, foi utilizado como base para o desenvolvimento deste trabalho. Neste modelo, uma equação retrata a evolução da deformação da gota com respeito ao escoamento imposto sobre ela e a outra incorpora as características dessa evolução para o cálculo do tensor de tensões adicional da gota. Vale lembrar que devido às proporções geométricas da gota, o escoamento dentro dela e nas suas proximidades é de baixo número de Reynolds. Em um regime de pequenas deformações a gota é convectada pelo fluido mesmo que o escoamento da emulsão, em si, possua um elevado número de Reynolds.

As simplificações propostas por Prandtl para a equação do movimento dentro dos domínios físicos da camada limite são válidas para escoamentos com elevados números de Reynolds. Neste caso, os efeitos convectivos equilibram-se com os efeitos difusivos e a camada limite formada sobre uma placa plana, por exemplo, possui uma espessura δ muito menor que o comprimento L da placa. Neste trabalho, o escoamento da emulsão foi analisado dentro da camada limite e, com isso, as simplificações de Prandtl foram aplicadas. No modelo proposto estas simplificações foram introduzidas nos principais elementos constituintes do divergente do tensor de tensões resultante da emulsão, respeitando a análise de escala dos termos associados. Verificou-se também que apenas o termo dominante de cisalhamento $\partial u / \partial y$ é relevante. De acordo com estas conclusões, o tensor de Green \mathbf{A} , que retrata as informações da microescala da emulsão, foi calculado em regime permanente e a partir dos resultados obtidos o tensor de tensões da gota $\boldsymbol{\sigma}^d$ foi determinado. Com isso, um modelo de equações de movimento para a camada limite de uma emulsão pôde ser desenvolvido.

Um modelo numérico de resolução das equações de Navier-Stokes por elementos finitos também foi apresentado em paralelo. Neste aspecto, os principais conceitos da formulação integral destas equações foram expostos e as condições de contorno para o problema de camada

limite laminar foram preliminarmente estudados e posteriormente validados. Dessa forma, o modelo de equações para a camada limite de uma emulsão foi implementado e comparado com o perfil de velocidade desta mesma emulsão sem os seus efeitos pseudo-plásticos característicos, em uma situação de taxa de cisalhamento tendendo a zero ou baixo número de capilaridade. Verificou-se que a diferença entre os dois perfis se deu, basicamente, pela presença do comportamento *shear-thinning* da emulsão e de diferenças de tensões normais em um intervalo típico de crescimento do número de capilaridade. Ainda com os resultados desta simulação, verificou-se também que os perfis de velocidade deste fluido não Newtoniano se repetem ao longo do domínio de estudo caracterizando a possível existência de uma variável de similaridade. Em última análise, um estudo da importância da contribuição de cada termo das equações modelo para a camada limite da emulsão foi efetuado. Como resultado, evidenciou-se que, de fato, apenas uma única equação na direção x , dada por (5.19), é relevante e determinante para a definição e análise do comportamento da camada limite de uma emulsão monodispersa e diluída.

Em trabalhos futuros o objetivo é reunir os resultados levantados neste trabalho e estudá-los com maior profundidade. Neste sentido, buscar-se-á adimensionalizar a equação (5.19) e estudar o comportamento físico de cada termo. Outra meta a ser atingida é o estudo e a busca de uma possível variável de similaridade para o perfil de velocidade fruto do possível modelo de emulsão apresentado.

Referências

- Almeida, M. H. P. (1998). Simulação numérica da mecânica de deformação de partículas em emulsões diluídas. Master's thesis, Universidade de Brasília.
- Aris, R. (1962). *Vectors, tensors and the basic equations of fluid mechanics*. Dover Publications, INC.
- Bachelor, G. K. (1976). *Developments in Microhydrodynamics*. North Holland and Publishing Company.
- Batchelor, G. K. (1967). *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press.
- Batchelor, G. K. (1970). Stress in system in a suspension of force-free particles. *Journal of Fluid Mechanics*.
- Carvalho, J. A. A. (2008). Hidrodinâmica dos escoamento do sangue em microvasos. Master's thesis, Universidade de Brasília.
- Carvalho, M. S. & Valério, J. V. (2012). *Introdução ao Método de Elementos Finitos: Aplicação em Dinâmica dos Fluidos*. SBMAC - Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional.
- Clift, R., Grace, J. R., & Weber, M. E. (1978). *Bubbles, Drops, and Particles*. Dover Publications, INC.
- Donea, J. & Huerta, A. (2003). *Finite Element Methods for Flow Problems*. J. Wiley & Sons, Ltd.
- Einstein, A. (1906). Eine neue bestimmung der moleküledimensionen. *Ann. Physik*.
- Çengel, Y. A. (2007). *Mecânica dos Fluidos - Fundamentos e Aplicações*. McGraw-Hill, Inc.
- Frankel, N. A. & Acrivos, A. (1970). The constitutive equation for a dilute emulsion. *Journal of Fluid Mechanics*, 44.
- Lamb, H. (1932). *Hydrodynamics*. Cambridge University Press.
- Maffettone, P. L. & Minale, M. (1998). Equation of change for ellipsoidal drops in viscous flow. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*.
- Olim, J. S. S., Haddad, J., Viana, A. N. C., & Martins, A. R. S. (2003). Conservação de energia em refinarias de petróleo. *II Congresso Brasileiro de Pesquisa e Desenvolvimento em Petróleo e Gás*.

- Oliveira, T. F. (2007). *Microhidrodinâmica e reologia de emulsões*. PhD thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- Pao, R. H. F. (1967). *Fluid Dynamics*. Charles E. Books, Inc.
- Rallison, J. M. (1984). The deformation of small viscous drops and bubbles in shear flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*.
- Schlichting, H. (1979). *Boundary-layer theory*. McGraw-Hill Book Company.
- Schowalter, W. R., Chaffey, C. E., & Brenner, H. (1968). Rheological behavior of a dilute emulsion. *Journal of Colloid and Interface Science*.
- Schramm, L. L. (2005). *Emulsions, Foams, and Suspensions*. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA.
- Tambe, D. E. & Sharma, M. M. (1993). Factors controlling the stability of colloid-stabilized emulsions. *Journal of Colloid and Interface Science*.
- Taylor, G. I. (1932). The viscosity of a fluid containing small drops of another fluid. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*.
- Taylor, G. I. (1934). The formation of emulsions in definable fields of flow. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*.
- White, F. M. (2011). *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, Inc.